Братулин Александр Вадимович,
начальник участка связи,
АО «Государственный Рязанский приборный завод»,
г. Рязань, Россия;
Пименов Сергей Юрьевич,
инженер-конструктор,
АО «НИИП имени В.В. Тихомирова»,
г. Жуковский, Московская область, Россия;
Тинаев Василий Владимирович,
инженер-конструктор,
АО «Государственный Рязанский приборный завод»,
г. Рязань, Россия

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ РАЗЛИЧНЫХ АЛГОРИТМОВ ФОРМИРОВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ С ГАУССОВСКИМ ЗАКОНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

В научной деятельности человеку часто приходится иметь дело не с реальными объектами, а с некоторыми их прототипами, которые являются подобием реальных объектов, либо имитируют некоторые их свойства.

Современная теория радиолокации в значительной степени опирается на вероятностные концепции. Вероятностными являются не только характеристики, описывающие работу радиотехнических систем: вероятность безотказной работы, ошибочной передачи и т. п., но и критерии, на основании которых синтезируются оптимальные устройства обработки [1].

Поэтому при проектировании и отладке радиотехнических систем необходимы модели последовательностей случайных чисел, имитирующие радиосигналы с законом распределения согласно решаемой задаче.

Для моделирования величины с заданным законом распределения применяется функциональное преобразование случайной величины с равномерным законом распределения (0, 1) [4].

Создание методов моделирования – актуальная задача. На практике часто возникает ситуация, когда для моделирования данного процесса известно много различных методов, и надо выбрать наиболее подходящий [2].

В данной статье рассмотрены различные методы моделирования случайной величины с гауссовским законом распределения, наиболее часто встречающимся в радиоинженерной практике, и проведено их сравнение с точки зрения производительности.

Нормальной (или гауссовой) называется случайная величина X, определенная на всей числовой оси (− ∞, ∞), имеющая плотность распределения вероятности f(x) [3]:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}) \qquad (1)$$

где μ – математическое ожидание,

σ – среднеквадратическое отклонение.

Для моделирования такого процесса можно применить следующие наиболее распространенные методы:

Преобразование Бокса-Мюллера, 1 вариант:

Пусть r и φ — независимые случайные величины, равномерно распределенные на интервале (0, 1]. Вычисляются два числа z_0 и z_1:

$$z_0 = \cos(2 \cdot \pi \cdot \varphi)\sqrt{-2 \cdot \ln r} \qquad (2)$$

$$z_0 = \sin(2 \cdot \pi \cdot \varphi)\sqrt{-2 \cdot \ln r} \qquad (3)$$

В таком случае z_0 и z_1 – независимые величины, нормально распределенные с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1.

Преобразование Бокса-Мюллера, 2 вариант:

Пусть x и y – независимые случайные величины, равномерно распределенные на отрезке [-1, 1]. Вычисляется число s:

$$s = x^2 + y^2 \qquad (4)$$

Если s > 1 или s = 0, то снова вычисляют s. При выполнении условия 0 < s ≤ 1 вычисляют случайные числа z_0 и z_1 с нормальным законом распределения:

$$z_0 = x \cdot \sqrt{\frac{-2 \cdot \ln s}{s}} \qquad (5)$$

$$z_1 = y \cdot \sqrt{\frac{-2 \cdot \ln s}{s}} \qquad (6)$$

Метод обратных функций. Метод заключается в следующем. Пусть требуется получить значения случайной величины X, распределенной в интервале (a, b) с плотностью вероятности f(x). Функция распределения F(y) любой непрерывной случайной величины:

$$F(y) = \int_a^y f(x) \cdot dx \qquad (7)$$

равномерно распределена на интервале (0;1). Тогда случайную величину X с произвольной плотностью распределения f(x) можно рассчитать по следующему алгоритму:

Генерация случайной величины r, равномерно распределенной в интервале (0;1) и установка равенства функции распределения F(X) полученному случайному числу r. Получаем уравнение:

$$F(X) = \int_a^X f(x) \cdot dx = r \qquad (8)$$

Решение уравнения $X=F^{-1}(r)$, нахождение значения X.

Для получения случайных чисел с нормальным распределением используется аппроксимация:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \exp(-\frac{x}{2}) = \frac{2k \cdot \exp(-k \cdot x)}{(1+\exp(-k \cdot x))^2}, \text{ где } x > 0,\ k = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \qquad (9)$$

Если воспользоваться (9) для случайной величины с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp(-\frac{x^2}{2}),\ -\infty < x < +\infty \qquad (10),$$

то получим для положительной полуоси величину

$$x = \frac{1}{k} \cdot \ln\frac{1+R}{1-R}, \qquad (11)$$

где R – случайное число, равномерно распределенное в диапазоне (0, 1).

В данном случае x > 0. Если умножать полученный результат на 1 и -1 случайным образом равновероятно, то получим случайную величину с нормальным законом распределения [3]. Для полученных таким образом чисел величина среднеквадратического отклонения будет равна 1,136.

Центральная предельная теорема. Теорема утверждает, что сумма достаточного количества слабо зависимых случайных величин, имеющих примерно одинаковые масштабы имеет распределение, близкое к нормальному.

Центральная предельная теорема для стандартной случайной нормальной величины. Для данного алгоритма используется предел:

$$\varsigma_n = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n - n \cdot a}{\sigma\sqrt{n}} \to N(0,1), \text{ при } n \to \infty \quad (12)$$

где α_i – случайные числа с некоторым законом распределения;

$a = M\{\alpha_i\}$;

$\sigma = D\{\alpha_i\}$;

Если выбрать в качестве α_i числа с равномерным распределением в интервале (0;1), то a = 0,5; σ = 1/12. В таком случае получаем приближенную формулу для последовательности чисел со стандартным нормальным законом распределения:

$$\varsigma = \sqrt{\frac{12}{n}}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i - \frac{n}{2}\right), \qquad (13)\ [3]$$

Методы реализованы при помощи средств языка программирования Java. Использовался персональный компьютер с параметрами: процессор – Intel Core i5-2400, 3.1 ГГц, ОЗУ – 4 ГБ. Результаты приведены в таблице 1. В третьей колонке таблицы приведено время, затраченное соответствующим датчиком, на создание 5.000.000 случайных чисел. Для всех последовательностей, кроме полученной методом обратных функций, μ = 0, σ = 1.

Таблица 1

Вид источника	Время, мс
Преобразование Бокса-Мюллера 1 вариант	2282
Преобразование Бокса-Мюллера 2 вариант	2164
Метод обратных функций	2257
Центральная предельная теорема, 500 слагаемых	348342
Центральная предельная теорема, 100 слагаемых	68930
Центральная предельная теорема, 50 слагаемых	35912
Центральная предельная теорема, 30 слагаемых	21958
Центральная предельная теорема, 20 слагаемых	14677
Центральная предельная теорема, 10 слагаемых	6885
Центральная предельная теорема, 5 слагаемых	3617

Вид источника	Время, мс
Центральная предельная теорема, 3 слагаемых	2261
Центральная предельная теорема для стандартной случайной нормальной величины, 500 слагаемых	540897
Центральная предельная теорема для стандартной случайной нормальной величины станд., 50 слагаемых	56631
Центральная предельная теорема для стандартной случайной нормальной величины станд., 10 слагаемых	12845
Центральная предельная теорема для стандартной случайной нормальной величины станд., 5 слагаемых	7456
Центральная предельная теорема для стандартной случайной нормальной величины станд., 3 слагаемых	5271

Наилучшие результаты с точки зрения скорости генерации случайных чисел показывают датчики на основе преобразования Бокса-Мюллера и метод обратных функций.

Для генерации чисел по центральной предельной теореме требуются значительные временные затраты. При суммировании 30 слагаемых, когда характеристики последовательности близки к теоретическим, время генерации такого датчика превышает аналогичные результаты для преобразования Бокса-Мюллера примерно в 10 раз.

Формула для центральной предельной теоремы для стандартной случайной нормальной величины ожидаемо требует больше времени, чем формула для центральной предельной теоремы, так как в формуле присутствуют дополнительные арифметические операции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гельгор А.Л. Методы моделирования случайных величин и случайных процессов. – СПб.: Издательство политехнического университета, 2012.*

2. *Дёрффель К. Статистика в аналитической химии. – М.: Мир, 1994.*

3. *Дорофеев Н.В. Компьютерное и имитационное моделирование. Методические указание к лабораторным работам. – Муром: ФГБО УВПО «Владимирский государственный университет имени Столетовых», 2014.*

4. *Зорин А.В., Зорин В.А., Федоткин М.А. Моделирование случайных величин и проверка гипотез о виде распределения. – Нижний Новгород: Издательство Нижегородского университета, 2006.*