

**Иванычев Дмитрий Алексеевич,**

*канд. физ.-мат. наук, доцент,*

*ФГБОУ ВО «Липецкий государственный технический университет»,*

*г. Липецк, Россия*

## **ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАВНОВЕСИИ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНКИ**

В настоящей работе предлагается приближенный метод решения плоской статической задачи теории упругости для однородной ортотропной среды со слабо выраженной анизотропией. Решена первая задача механики для кругового в плане тела из алюминия. Полученное решение является аналитическим и параметрическим, где в качестве параметров выступают параметры среды.

**Ключевые слова:** метод малого параметра, метод граничных состояний, плоская задача статики, приближённые решения, параметрические решения, анизотропия.

***Dmitry A. Ivanychev,***

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,*

*Lipetsk State Technical University,*

*Lipetsk, Russia*

## **PARAMETRIC SOLUTION OF THE PROBLEM OF EQUILIBRIUM OF THE CIRCULAR PLATE**

In this paper, we propose an approximate method for solving the plane static problem of the theory of elasticity for a homogeneous orthotropic medium with a weakly expressed anisotropy. The first problem of mechanics for an aluminum body circular in plan is solved. The solution obtained is analytic and parametric, where the parameters of the medium act as parameters.

**Keywords:** small parameter method, boundary state method, plane statics problem, approximate solutions, parametric solutions, anisotropy.

Рассматривается равновесие пластинки из слабо анизотропного материала под действием усилий, распределенных по боковым граням.

**Цель задачи:** получить решение, в которое параметры среды включены в явном виде. Для этого предложена методика, основанная на методе малого параметра (метод Пуанкаре) и методе граничных состояний [5].

Методика основана на представлении механических характеристик в виде ряда (1), расположенного по степеням некоторых малых параметров.

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \sum_{mnk} \alpha^m \beta^n \delta^k \sigma_{ij}^{mnk}; \\ \varepsilon_{ij} &= \sum_{mnk} \alpha^m \beta^n \delta^k \varepsilon_{ij}^{mnk}; \\ u_i &= \sum_{mnk} \alpha^m \beta^n \delta^k u_i^{mnk}.\end{aligned}\quad (1)$$

Далее обобщенному закону Гука для ортотропной среды [4] придаётся вид закона Гука для изотропной:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \lambda_1 \theta + 2\mu_1 \varepsilon_x; \\ \sigma_y &= \lambda_1 \theta + 2\mu_2 \varepsilon_y; \\ \tau_{xy} &= 2\mu_0 \varepsilon_{xy},\end{aligned}\quad (2)$$

где:

$$\lambda_1 = \frac{E_1 E_2 \nu_{12}}{E_1 - E_2 \nu_{12}^2}; \quad \mu_1 = \frac{1}{2} \frac{E_1 (E_1 - E_2 \nu_{12})}{E_1 - E_2 \nu_{12}^2}; \quad \mu_2 = -\frac{1}{2} \frac{E_1 E_2 (\nu_{12} - 1)}{E_1 - E_2 \nu_{12}^2}; \quad \mu_0 = G_{12}, \quad (3)$$

Малые параметры:

$$\lambda_1 = \lambda(1 + \alpha); \quad \mu_1 = \mu(1 + \beta); \quad \mu_2 = \mu(1 + \gamma); \quad \mu_0 = \mu(1 + \delta), \quad (4)$$

где  $\lambda, \mu$  – параметры Ламе изотропной среды.

Далее ряды (1) подставляются в соотношения (2) и выделяется изотропная составляющая на каждом приближении. Организовывается перебор  $m, n, k$  таким образом, чтобы кроме полей характеристик на определённом приближении в уравнениях участвовали поля, ранее уже полученные. Решение плоской изотропной задачи на каждом приближении проводится методом граничных состояний [5].

Рассматривается первая основная задача для круговой пластины (рис. 1)  $R = 1$  из алюминия [1]. На боковой поверхности заданы усилия:

$$p \in (\cos[q], 0), \quad 0 \leq q \leq 2\pi.$$

Массовые силы отсутствуют.

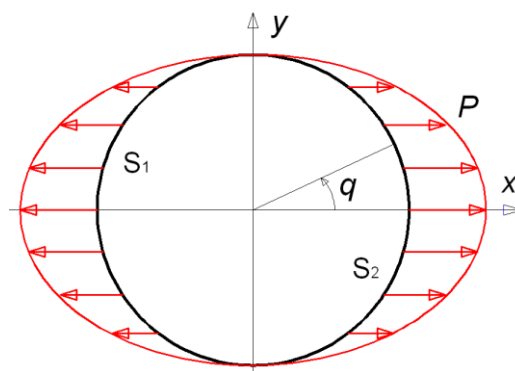


Рисунок 1 – Ортоотропная пластинка

На каждом шаге итерации рассматривается изотропная среда с приведёнными безразмерными модулем Юнга на растяжение  $E = 70.75$  и коэффициентом Пуассона  $\nu = 0.24$  (следовательно,  $\mu = 28.53$ ,  $\lambda = 18.018$ ), которым соответствуют малые параметры  $\alpha = 0.108$ ,  $\beta = -0.142$ ,  $\delta = 0.0165$ .

В результате решения во втором приближении компоненты тензора напряжений и вектора перемещения имеют вид.

$$\sigma_{xx} = 1, \sigma_{yy} = 0, \tau_{xy} = 0.$$

$$u \approx [14.134x - 2.735x\alpha + 0.5294x\alpha^3 - 11.398x\beta + 2.206x\alpha^2\beta + 2.206x\alpha\beta^2 + 9.192x\beta^3] \cdot 10^{-3}.$$

$$v \approx [-3.392y + 0.6565y\alpha - 0.127y\alpha^3 + 2.735y\beta - 0.5295y\alpha^2\beta - 0.5295y\alpha\beta^2 - 2.206y\beta^3] \cdot 10^{-3}.$$

Для представления результата, содержащего физические параметры среды, необходимо последние выразить из (4) и в полученные выражения подставить соотношения (3).

Верификация полученного результата осуществляется сопоставлением полнопараметрического решения с решением, полученным традиционным способом [3]. Полученные механические характеристики снимают необходимость заново решать задачу при малом изменении физических постоянных среды.

Решение пространственных задач для слабо анизотропных тел рассмотрено в [2].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Золоторевский В.С. Механические свойства металлов. 2 изд. – М., 1983. – 352 с.

2. *Иванычев Д.А., Пеньков В.Б. Полнопараметрическое решение пространственных задач теории слабо анизотропной упругости / Д.А. Иванычев, В.Б. Пеньков // Наука и бизнес: пути развития. – 2017. – № 9 (75).*
3. *Иванычев Д.А., Рязанцева Е.А. Исследование напряженно-деформируемого состояния анизотропных тел методом граничных состояний // Научный альманах. – 2015. – № 11-4(13).*
4. *Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. – М.: ГИТТЛ, 1957. – 463 с.*
5. *Пеньков В.Б., Пеньков В.В. Метод граничных состояний для решения задач линейной механики // Дальневосточный математический журнал. – 2001. – Т.2. – №2.*