Иванычев Дмитрий Алексеевич,

канд. физ.-мат. наук, доцент,

ФГБОУ ВО «Липецкий государственный технический университет»,

г. Липецк, Россия

РЕШЕНИЕ ПЕРВОЙ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ СОСТОЯНИЙ

Проведено решение первой основной задачи теории упругости для тела из анизотропного материала методом граничных состояний. Построена теория формирования базисов пространств состояний, составляющих основу метода, обеспечен их изоморфизм. Изоморфизм позволяет отыскание внутреннего состояния свести к исследованию граничного. Обеспечена сходимость решения, проведено решение для кругового в плане тела с неоднородными граничными условиями. Представлена визуализация результатов.

Ключевые слова: анизотропные тела, плоские задачи, пространства состояний, ряд Фурье, метод граничных состояний, краевые задачи.

Dmitry A. Ivanychev,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,

MBPEI of HE «Lipetsk State Technical University»,

Lipetsk, Russia

THE SOLUTION OF THE FIRST BASIC PROBLEM OF THE ELASTICITY THEORY BY THE METHOD OF BOUNDARY CONDITIONS

The first basic problem of the theory of elasticity for a body of anisotropic material is solved by the method of boundary states. The theory of the formation of the bases of the state spaces that form the basis of the method is constructed, and their isomorphism is ensured. The isomorphism allows us to reduce the search for the internal state to the study of the boundary state. The convergence of the solution is ensured, a solution is given for a circular body with inhomogeneous boundary conditions. The results are visualized.

Keywords: anisotropic bodies, plane problems, state spaces, Fourier series, boundary state method, boundary value problems.

В настоящее время в промышленности, в военной, авиакосмической и других отраслях широко используются натуральные и синтетические материалы, которые с точки зрения теории упругости интерпретируются как анизотропные в отношении упругих свойств. Для того чтобы уметь рассчитывать на прочность детали из таких материалов, необходимо уметь решать задачи теории упругости для анизотропных тел.

Метод граничных состояний [1] (МГС) является новым, эффективным, компьютерно-ориентированным методом решения краевых задач уравнений математической физики. Его основу составляют понятия пространств внутренних и граничных состояний, которые сопряжены гильбертовым изоморфизмом. Строятся базисы этих пространств, проводится их ортогонализация. Затем искомое состояние раскладывается в ряд по элементам ортонормированного базиса, и задача состоит в отыскании коэффициентов линейной комбинации, то есть коэффициентов Фурье.

МГС опирается на фундаментальное или общее решение для среды. В случае плоских задач анизотропной упругости общее решение получено Лехницким [2]. Внутреннее состояние $\xi = \{\{u,v\},\{\varepsilon_x,\varepsilon_y,\varepsilon_{xy}\},\{\sigma_x,\sigma_y,\sigma_{xy}\}\}$ определяется наборами компонент вектора перемещений, тензоров деформаций и напряжений. Базисные наборы внутренних состояний можно конструировать, генерируя возможные варианты для аналитических функций [3]:

$$\begin{pmatrix} \Phi_1(z_1) \\ \Phi_2(z_2) \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} z_1{}^k \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ z_2{}^k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} iz_1{}^k \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ iz_2{}^k \end{pmatrix} : k = 1,2,... \right\} \tag{1}$$

Скалярное произведение в пространстве Ξ внутренних состояний выражает внутреннюю энергию упругого деформирования:

$$(\xi_1,\xi_2) = \int_D \left(\sigma_x{}^1\varepsilon_x{}^2 + \sigma_y{}^1\varepsilon_y{}^2 + 2\sigma_{xy}{}^1\varepsilon_{xy}{}^2\right) ds \tag{2}$$

На границе тела напряжения оставляют «след» в виде поверхностных усилий p_x, p_y, которые вкупе с граничными значениями перемещений образуют граничное состояние $\gamma = \{\{u,v\},\{p_x,p_y\}\}$. В пространстве граничных состояний Γ скалярное произведение выражает работу внешних сил:

$$(\gamma_1,\gamma_2) = \int_{\partial D} \left(p_x{}^1 u^2 + p_y{}^1 v^2\right) dl \tag{3}$$

В силу теорем Бетти, Сомильяны и принципа возможных перемещений, оба пространства Ξ, Γ сопряжены гильбертовым изоморфизмом, что позволяет отыскание внутреннего состояния свести к построению изоморфного ему граничного состояния. Решение есть ряд Фурье; при заданных на границе усилиях p_{x0}, p_{y0} коэффициенты Фурье рассчитываются так:

$$c_j = \int\limits_{\partial D} \left(p_{x0} u^j + p_{y0} v^j \right) dl \qquad (4)$$

Первая основная задача для тела круглой формы (рис. 1).

Одноосное растяжение при воздействии на сектор. Усилия на границах заданы функцией:

$$P(q) = \begin{cases} P_x = \cos[q] + \cos[\pi/4],\ P_y = 0,\ q \in S_1; \\ P_x = \cos[q] - \cos[\pi/4],\ P_y = 0,\ q \in S_2; \\ P_x = 0,\ P_y = 0,\ q \in S_3; \\ P_x = 0,\ P_y = 0,\ q \in S_4. \end{cases} \qquad (5)$$

Задавались следующие упругие характеристики (принята безразмерная форма решения): модули Юнга $E_x = 1 \cdot 10^5$, $E_y = 0{,}42 \cdot 10^5$; модуль сдвига $G = 0{,}075 \cdot 10^5$; коэффициент Пуассона $\mu = 0{,}1$; коэффициенты взаимного влияния первого рода $\eta_{xy,x} = 0{,}07$, $\eta_{xy,y} = 0{,}04$.

Результаты решения имеют аналитический вид, однако в силу их громоздкости, представлены в графическом виде (рис. 1, 2).

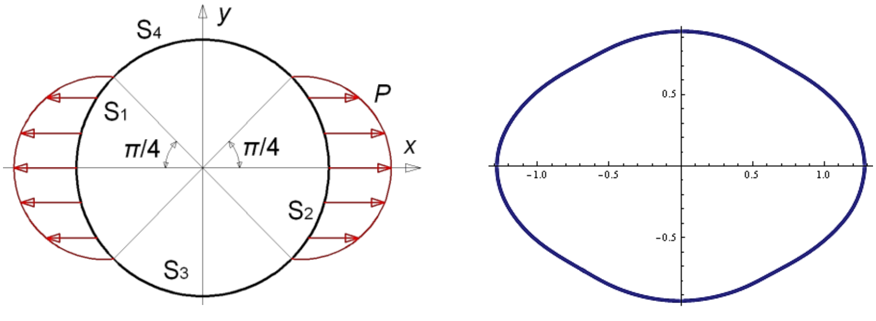
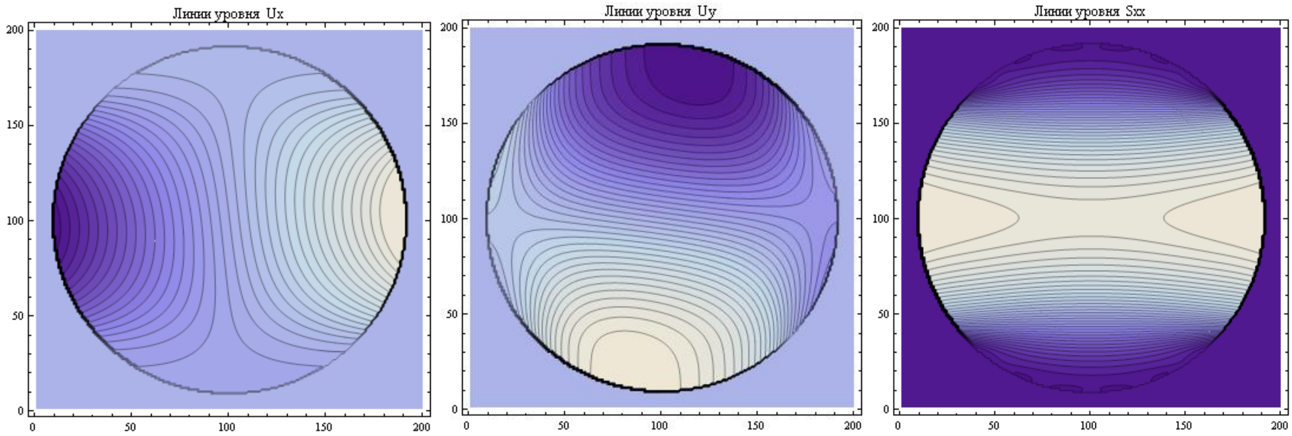


Рисунок 1 – Нагружение тела круглой формы (слева) и его контур в гипертрофированном деформированном состоянии (справа)

На рис. 2 приведены изолинии различных характеристик напряженно-деформированного состояния.



а *б* *в*

Рисунок 2 – Изолинии: *а* – компоненты вектора перемещения u; *б* – компоненты вектора перемещения v; *в* – компоненты напряжения σ_x.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пеньков В. Б., Пеньков В. В. Метод граничных состояний для решения задач линейной механики // Дальневосточный математический журнал. – 2001. – Т. 2, №2. – С. 115-137.

2. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – Москва: Наука, 1977. – 416 с.

3. Иванычев Д.А. Решение плоских задач анизотропной упругости методом граничных состояний / В.Б. Пеньков, Д.А. Иванычев // Вести высших учебных заведений Черноземья. Научно-технический и производственный журнал. – Липецк, ЛГТУ. – 2010. – №2 (20)