

Хасанов Станислав Вильевич,

канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математики,

ФГБОУ ВО «Уфимского государственного авиационного технического университета»,

г. Уфа, Республика Башкортостан, Россия

ПОВЕДЕНИЕ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ НА ГРАНИЦЕ ОБЛАСТИ В C^n

В 1974 г. было доказано [1], что любое биголоморфное отображение ограниченных строго псевдовыпуклых областей в C^n гладко продолжается до CR-диффеоморфизма их границ. Таким образом, классификация ограниченных областей (с точностью до биголоморфизмов) сводится к классификации границ этих областей с точностью до CR-диффеоморфизмов. Одновременно с этим результатом, С.И. Пинчук доказал в [2] теорему о локальном продолжении CR-отображений вещественно-аналитических поверхностей, в которой использовал принцип отражения Шварца для аналитического продолжения CR-отображений. В 1978 г. С.М. Вебстер установил в [3] общий результат, согласно которому CR отображения локально комплексно алгебраичны, если исходная поверхность и её образ алгебраичны. Эти результаты привели к возникновению области комплексного анализа, связанной с аналитической продолжимостью биголоморфных отображений.

С тех пор эти вопросы активно разрабатывались, и в результате, были получены некоторые существенные уточнения оригинальных утверждений.

В данной обзорной работе рассматривается подход, позволяющий свести изучение гладких CR-структур к аналитическим. Это так называемый метод растяжения, предложенный С.И. Пинчуком и развитый автором в [4], который можно рассматривать как пошаговое преобразование гладких структур в C^n в аналитические. Эта деформация рассматривается вместе с соответствующим диффеоморфизмом заданных гладких структур.

Метод растяжения позволяет свести задачу к аналитическому случаю, в котором существенную роль играет принцип отражения Вебстера.

Существенным его моментом являлось использование асимптотически голоморфных гладких функций f , для которых частные производные $\bar{\partial}f$ обращается в нуль с некоторым порядком вблизи вещественного многообразия. Вообще, асимптотическая голоморфность функции f – это малое значение (стремящееся к нулю) для $\bar{\partial}f$. Порядок убывания зависит от конкретной задачи.

Основой же метода растяжений являлась следующая оценка, также полученная автором. Пусть D – гладкая ограниченная строго псевдовыпуклая область в C^n и ρ ее определяющая функция. Пусть f голоморфная в D функция. Существует постоянная $K > 0$, такая что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}_k}(z) \frac{\partial}{\partial z} (\rho(f(z))) \geq K$$

Оценка локальна, что не уменьшает общности теоремы о продолжении.

Заметим, что каждое голоморфное отображение строго псевдовыпуклых областей удовлетворяет этому условию.

Важным условием аналитического продолжения являлась необходимость вещественной аналитичности гиперповерхностей. Оказалось, что в случае гладкости границы области порядка n имеет место продолжение отображения на границу области с гладкостью $n-1/2-\varepsilon$ для любого ε (то есть продолжение обладает гладкостью порядка $n-1$ и все производные $(n-1)$ порядка удовлетворяет условию Лишица:

$$|F(x) - F(y)| \leq |x - y|^{0,5-\varepsilon}$$

Рассмотрим следующую задачу, которая, помимо ее самостоятельного интереса, имеет много важных приложений. Обозначим через $\Delta = \{\zeta \in C : |\zeta| < 1\}$ единичный диск в C . Пусть M – вполне вещественное подмногообразие в C^n и $f: \Delta \rightarrow C^n$ голоморфное отображение, которое назовем голоморфным диском в C^n . Предположим, что граничные значения f на открытой дуге γ единичной окружности $\partial\Delta$ принадлежат M .

Что можно сказать о регулярности f на $\Delta \cup \gamma$? Известна следующая Теорема. Пусть Ω – область в $\mathbb{C}^n$, ρ – непрерывная плюрисубгармоническая функция на Ω , а $f : \Delta \rightarrow \Omega$ – голоморфное отображение, такое что $\rho \circ f = 0$ на Δ . Пусть существуют предельные значения $\rho \circ f(re^{i\theta})d\theta$ (где $d\theta$ —мера Лебега) на единичной окружности $d\Delta$. Пусть для некоторой точки a на γ предельное множество содержит точку p , такую, что ρ строго плюрисубгармонична в окрестности точки p .

Тогда в $\Delta \cup \gamma$ функция f продолжается непрерывно в окрестность точки a в $\Delta \cup \gamma$. Это продолжение удовлетворяет условию Липшица с показателем $1/2$.

Этот результат является естественным обобщением теорем о граничной регулярности конформных отображений, поскольку в случае $n = 1$ подмногообразие M – это гладкая кривая на комплексной плоскости.

Кроме того, эта теорема используется при доказательстве теоремы о соответствии границ при биголоморфных отображениях для областей в $\mathbb{C}^n$ с гладкими границами класса C^m . Теорема о соответствии показывала гладкое продолжение функции в окрестность данных областей (с потерей гладкости в $0,5$, которая не может быть улучшена) и была доказана автором в [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fefferman Ch. The Bergman kernel and biholomorphic mappings of pseudoconvex domains // *Invent. math.* – 1974. – 26. – С. 1-65.
2. Пинчук С. Об аналитическом продолжении голоморфных отображений / *Мат. сб.* – 1975. – 27. – С. 345-392.
3. Webster S. Some birational invariants for algebraic real hypersurfaces / *Duke Math. J.* – 1978. – 45. – Р. 39-46.
4. Хасанов С.В. Соответствие границ при биголоморфных отображениях в $\mathbb{C}^n$ // *Сибирский математический журнал.* – 1988, т.19. – №3. – С. 156-162.