УДК 372.851

Кузьмин Сергей Геннадьевич,
доцент, канд. физ.-мат. наук,
ФГБОУ ВО ОмГУ,
г. Омск, Россия

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ СОСТАВЛЯЮЩАЯ ЗАДАЧ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Неотъемлемой частью геометрии являются построения циркулем и линейкой. К сожалению, в последнее время этим задачам не уделяется должного внимания, а ведь такие задачи являются неотъемлемой частью качественной подготовки педагогических кадров. В статье рассматривается решение одной задачи аналитической геометрии двумя методами и показываются преимущества использования циркуля и линейки для упрощения и визуализации процесса решения.

Ключевые слова: построение циркулем и линейкой, аналитическая геометрия, система координат, перспективно-аффинное преобразование, соответственные точки.

Sergey G. Kuzmin,
Associate Professor, PhD in Physical and Mathematical Sciences,
Omsk State Pedagogical University,
Omsk, Russia

GEOMETRIC COMPONENT OF THE PROBLEM ANALYTICAL GEOMETRY

An integral part of geometry are constructions with compasses and a ruler. Unfortunately, in recent years, these tasks have not received due attention, and in fact such tasks are an integral part of the quality training of teaching staff. The article considers the solution of one problem of analytical geometry by two methods and shows the advantages of using a compass and a ruler to simplify and visualize the solution process.

Keywords: compass and ruler construction, analytical geometry, coordinate system, perspective-affine transformation, corresponding points.

В последнее десятилетие все чаще в вузы приходят учиться выпускники средней школы, которые не имеют представления о решении задач на построение циркулем и линейкой. С другой стороны, курс геометрии в высшей школе чаще всего предполагает изучение аналитической геометрии, методы которой больше алгебраические. Поэтому при преподавании геометрии в педагогическом вузе необходимо рассматривать решения задач аналитической геометрии с применением построений циркулем и линейкой, чтобы сформировать у студентов необходимые умения и навыки.

Рассмотрим это на примере решения одной задачи из аналитической геометрии, относящейся теме «Кривые второго порядка на плоскости».

Задача. Из точки $M(6;5)$ провести касательные к эллипсу, для которого отрезки AB и CD, служат сопряжёнными диаметрами, если $A(17;10), B(-13;-10), C(7;5), D(-3;-5)$. Система координат – декартовая.

Методы аналитической геометрии приводят нас к следующему решению. Рассмотрим новую аффинную систему координат $O'XY$, где точка $O'(2;0)$ является общей серединой отрезков AB и CD (центр эллипса), а единичными векторами координатных осей абсцисс и ординат будут векторы $\overrightarrow{O'A} = (15;10)$ и $\overrightarrow{O'C} = (5;5)$ соответственно. Тогда уравнение эллипса в системе координат $O'XY$ примет вид $X^2 + Y^2 = 1$ [2, с. 375], а формулы преобразования координат при переходе от исходной системы Oxy к указанной будут находится по формулам [1, с. 44].

$$\begin{matrix} x = 15X + 5Y + 2 \\ y = 10X + 5Y \end{matrix} \quad (*) \qquad (1)$$

Из равенств $(*)$ следует, что:

$$\begin{matrix} X = \frac{1}{5}(x - y - 2) \\ Y = \frac{1}{5}(-2x + 3y + 4) \end{matrix} \quad (**) \qquad (2)$$

Используя, равенства [2] находим, что относительно системы $O'XY$ точка $M\left(-\frac{1}{5};\frac{7}{5}\right)$. Обозначим через $(X_0;Y_0)$ координаты точки касания. Тогда уравнение касательной в этой точке имеет вид [2, с. 371]: $X_0 X + Y_0 Y - 1 = 0$. Для определения координат точек касания получаем систему:

$$\begin{cases} -\frac{1}{5}X_0 + \frac{7}{5}Y_0 - 1 = 0 \\ X_0^2 + Y_0^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left(-\frac{4}{5};\frac{3}{5}\right), \left(\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right) \qquad (3)$$

Таким образом, получаем, что точки касания $T_1\left(-\frac{4}{5};\frac{3}{5}\right)$ и $T_2\left(\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right)$ относительно системы координат $O'XY$. По формулам [1] находим, что $T_1(-7;-5)$ и $T_2(15;10)$ относительно исходной системы координат Oxy. Теперь уравнение касательных можно составить по двум точкам. Получаем:

$$MT_1: 10x - 13y + 5 = 0 \text{ и } MT_2: 5x - 9y + 15 = 0 \qquad (4)$$

Естественно возникает вопрос: где мы здесь видим геометрию? Кроме геометрических слов «точка», «прямая», «эллипс» и «отрезок» трудно что-то еще найти. В чем причина? Просто к геометрической задаче мы добавили систему координат. А если этого не делать? Тогда задача приобретёт формулировку, свободную от алгебры:

«На плоскости даны два отрезка AB и CD (рис. 1), пересекающиеся в общей середине O. Принимая эти отрезки за сопряжённые диаметры эллипса, построить касательные к этому эллипсу из заданной точки M ».

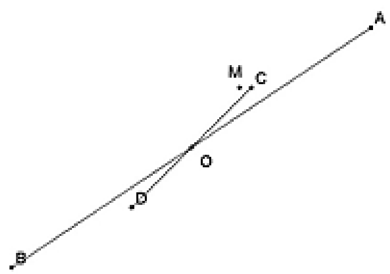

Рисунок 1 – Геометрическая составляющая задачи

Решим данную задачу, выполнив необходимые построения циркулем и линейкой. Построим окружность $\boldsymbol{w}$ с диаметром $\boldsymbol{AB}$. Пусть $\boldsymbol{C'D'}$ – диаметр этой окружности, перпендикулярный $\boldsymbol{AB}$. Рассмотрим перспективно аффинное преобразование с осью $\boldsymbol{AB}$ и парой соответственных точек $\boldsymbol{C, C'}$ [1, с. 146], которое данный эллипс преобразует в окружность $\boldsymbol{w}$. Пусть $\boldsymbol{M'}$ – образ точки $\boldsymbol{M}$ в этом преобразовании. Построим касательные к окружности $\boldsymbol{w}$ из точки $\boldsymbol{M'}$. Обозначим через $\boldsymbol{T_1', T_2'}$ точки касания. Тогда прообразы $\boldsymbol{T_1, T_2}$ этих точек являются точками касания эллипса. Теперь проводим касательные $\boldsymbol{MT_1}$ и $\boldsymbol{MT_2}$.

Все построения выполним в программе «Geogebra» (рис. 2). При этом программа позволяет исключить погрешности построений, которые возникали бы, если это делать реальными инструментами вручную. Поместив теперь исходные данные в точки с указанными координатами, можем легко убедиться в правильности решения этой же задачи геометрическим способом.

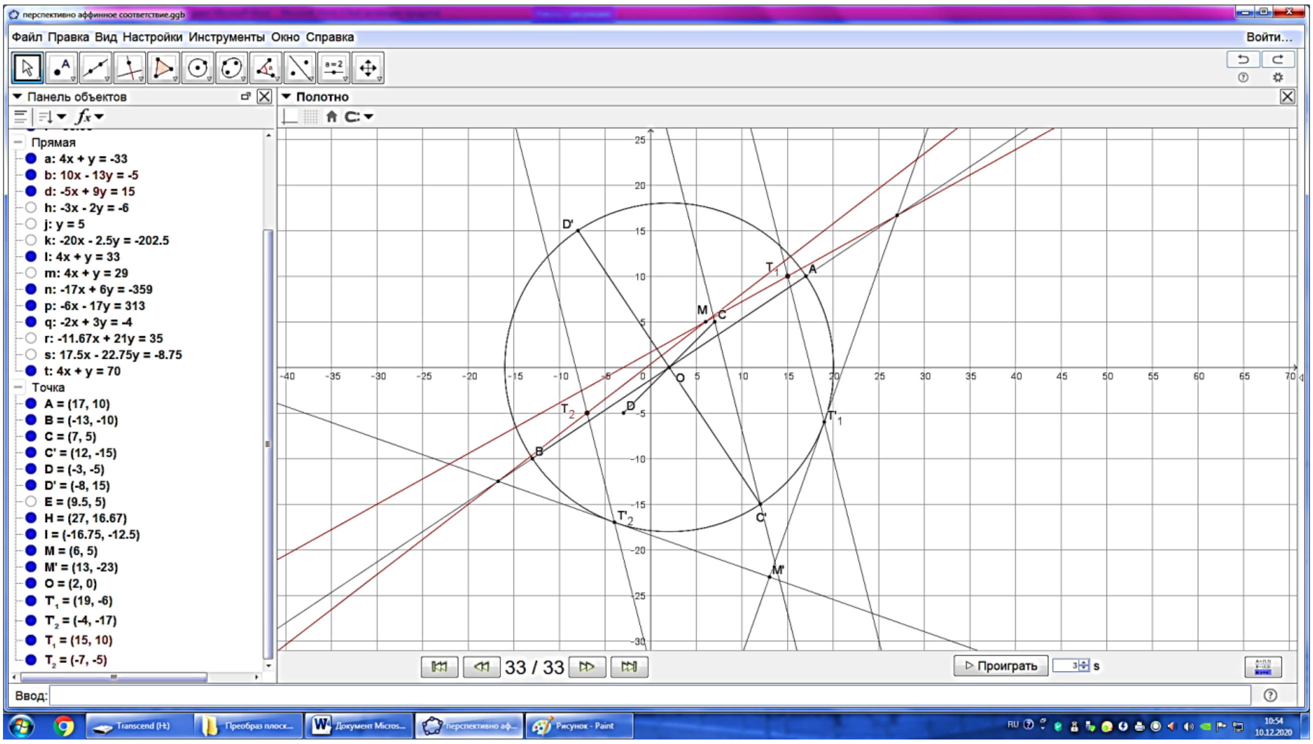

Рисунок 2 – Решение задачи циркулем и линейкой в программе «Geogebra»

Нетрудно видеть, геометрическое решение является более универсальным. Перетаскивая исходные точки в другие положения, мы можем получать ответ слева в координатах.

Заключение. В последние годы резко уменьшился объем часов на геометрию (впрочем, как и на все математические дисциплины) в учебном плане подготовки бакалавров и магистрантов, и из преподавания этой дисциплины исчез раздел конструктивной геометрии, в котором рассматриваются задачи на построения циркулем и линейкой. Очень важно вернуть в процесс обучения такие задачи, которые не только формируют специальные геометрические знания, но, что еще важнее, играют значительную роль в общем развитии личности, ее умении логически мыслить и доказательно обосновывать истинность утверждений в любой сфере деятельности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Атанасян Л. С. Геометрия: учеб. пособие для студ. физ.-мат. фак. пед. вузов. В 2 ч. – Ч. 1 / Л. С. Атанасян, В. Т. Базылев. – Москва : Просвещение, 2011.– 396 с. – Текст : непосредственный.

2. Моденов П.С. Аналитическая геометрия : учеб. для заоч. и вечерних отд. ун-тов и пед. вузов / П. С. Моденов. – Москва : Изд-во МГУ, 1969. – 698 с. – Текст : непосредственный.