

Лесников Владислав Алексеевич,

канд. техн. наук, доцент;

Наумович Татьяна Викторовна,

старший преподаватель;

Частиков Александр Вениаминович,

д-р техн. наук, профессор,

ФГБОУ ВО «Вятский государственный университет»,

г. Киров, Россия

АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ, СТРУКТУРА КОТОРЫХ ОСНОВАНА НА РАЗЛОЖЕНИИ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ В НЕПРЕРЫВНУЮ ДРОБЬ

Известно, что для реализации цифровых фильтров (ЦФ) может быть использовано бесконечно большое число структурных схем. Некоторые из структур характеризуются низкой чувствительностью характеристик к точности представления коэффициентов. Отдельная группа методов основана на разложении передаточной функции в непрерывную (цепную) дробь. Это разложение используется для построения лестничных структур. В данной работе исследуется чувствительность таких структур. Анализ показал, что чувствительность коэффициентов передаточной функции к точности представления некоторых коэффициентов разложения может быть очень низкой. В то же время выяснилось, что чувствительность передаточной функции к точности представления коэффициентов разложения превосходит чувствительность прямой и канонической форм ЦФ.

Ключевые слова: цифровой фильтр, бесконечная импульсная характеристика, чувствительность, структурный синтез.

Vladislav A. Lesnikov,

PhD, associate professor;

Tatiana V. Naumovich,

Senior lecturer;

Alexander V. Chastikov,

DSc, professor,

Vyatka State University,

Kirov, Russia

SENSITIVITY ANALYSIS OF DIGITAL FILTERS USING THE CONTINUED FRACTION EXPANSION OF TRANSFER FUNCTION

It is known that many structural schemes can be used to implement digital filters. Some structures of digital filters are characterized by low sensitivity of the characteristics to the accuracy of the representation of the coefficients. A separate group of methods for the structural synthesis of digital filters is based on the expansion of rational fractions, including transfer functions, into continued fractions. Because of this decomposition, ladder structures are obtained. The sensitivity of such ladder structures is analyzed in this paper. As a measure of the structure sensitivity, estimations of the partial derivatives of the transfer function coefficients with respect to the expansion coefficients in continued fraction were used. The analysis showed that the sensitivity of the transfer function coefficients to some expansion coefficients is very small. However, the presented examples show that the sensitivity to certain coefficients of expansion can exceed the sensitivity of the classical direct and the canonic forms.

Keywords: digital filters, IIR filters, sensitivity analysis, system implementation

Введение

Известно, что большое число структур может быть использовано для реализации ЦФ с заданной передаточной функции [1], [7], [12]. Такие классические структуры как прямые и канонические формы при реализации цифровых фильтров высокого порядка, имеют очень высокую чувствительность к точности представления коэффициентов. Это означает, что при небольших вариациях коэффициентов фильтра из-за квантования, характеристики ЦФ сильно искажаются. Другими словами, для достижения заданной точности характерной реализации может потребоваться очень большая длина слова. Представление передаточной функции в виде произведения или суммы передаточных функций, порядок которых не больше второго, приводит к формированию последовательной или параллельной формы. Эти структуры позволяют уменьшить требования к длине слова. Однако можно еще значительно уменьшить разрядность коэффициентов фильтра.

Большая группа методов основана на предварительном синтезе аналоговых структур с низкой чувствительностью [3], [4].

Аналоговые компоненты таких фильтров заменяются их цифровыми эквивалентами.

Некоторые методы структурного синтеза основаны на преобразованиях передаточной функции [14], на применении всепропускающих структур [5], на представлении в пространстве состояний [13] и других трюках. В [6] предложен метод для реализации фильтров без операции умножения, основанный на матричном представлении любой структуры.

Настоящая работа посвящена анализу лестничных структур, синтез которых основан на разложении рациональных дробей в непрерывную дробь [11] – [14].

I. Структурный синтез, основанный на разложении рациональных дробей в непрерывную дробь

Некоторые методы реализации структур цифровых фильтров основаны на разложении рациональных дробей в непрерывную дробь [8] – [11]. В качестве рациональной дроби может выступать:

- передаточная функция:

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^n b_i z^{n-i}}{\sum_{i=0}^n a_i z^{n-i}} \quad (1)$$

- функция, обратная передаточной функции.

A. Разложение в непрерывную дробь в форме IA

В этом случае рациональная дробь $\Theta(z)$ представляется следующим образом:

$$\Theta(z) = A_0 + \frac{1}{B_1 z + \frac{1}{A_1 + \frac{1}{B_2 z + \frac{1}{A_2 + \dots + \frac{1}{B_n z + \frac{1}{A_n}}}}}} \quad (2)$$

Лестничная структура ЦФ третьего порядка, основанная на разложении $H(z)$ в форме IA, показана на рис. 1.

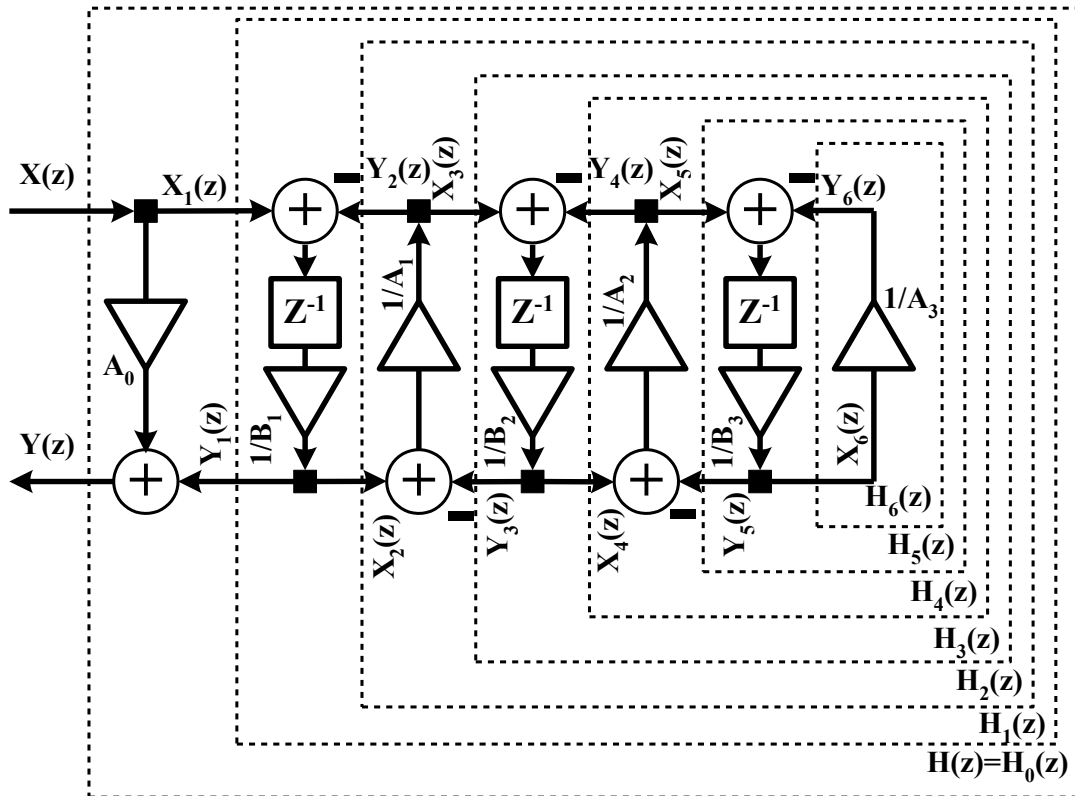


Рисунок 1 – Каноническая лестничная структура типа IA
(порядок $n=3$, $\Theta(z) = H(z)$)

Б. Разложение в непрерывную дробь в форме IB

В отличие от формы IA, это разложение выполняется для передаточной функции по отрицательным степеням комплексной переменной z :

$$\Theta(z) = A_0 + \frac{1}{B_1 z^{-1} + \frac{1}{A_1 + \frac{1}{B_2 z^{-1} + \frac{1}{A_2 + \dots + \frac{1}{B_n z^{-1} + \frac{1}{A_n}}}}}}. \quad (3)$$

В. Разложение в непрерывную дробь в форме IIА

В этом случае рациональная дробь $\Theta(z)$ представляется в виде:

$$\Theta(z) = A_0 + \frac{1}{B_1 z + A_1 + \frac{1}{B_2 z + A_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{B_n z + A_n}}}}. \quad (4)$$

В. Разложение в непрерывную дробь в форме ПВ

В этом случае разложение имеет вид:

$$\Theta(z) = A_0 + \frac{1}{B_1 z^{-1} + A_1 + \frac{1}{B_2 z^{-1} + A_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{B_n z^{-1} + A_n}}}}. \quad (5)$$

Структурная схема для этого случая содержит контуры без элементов задержки, а такие схемы физически нереализуемы (невычислимы).

II. Анализ структуры IA

Анализ чувствительности выполним для ЦФ с передаточной функцией

$$H(z) = \frac{b_0 z^3 + b_1 z^2 + b_2 z + b_3}{a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3} \quad (6)$$

Коэффициенты рассматриваемой структуры равны

$$\left\{ \begin{array}{l} b_0 = 0.0210747; \quad a_0 = 1; \\ b_1 = 0.0632241; \quad a_1 = -1.8663689; \\ b_2 = 0.0632241; \quad a_2 = 1.4986237; \\ b_3 = 0.0210747; \quad a_3 = -0.4636572. \end{array} \right. \quad (7)$$

Разложение передаточной функции в непрерывную дробь типа IA имеет вид:

$$H(z) = A_0 + \frac{1}{B_1 z + \frac{1}{A_1 + \frac{1}{B_2 z + \frac{1}{A_2 + \frac{1}{B_3 z + \frac{1}{A_3}}}}}}, \quad (8)$$

где

$$\left\{ \begin{array}{l} B_1 = 0.0632241; \\ B_2 = -24.67930932; \\ B_3 = 37.58688668; \end{array} \quad \begin{array}{l} A_0 = 0.0210747; \\ A_1 = -0.04715515553; \\ A_2 = 0.06208109451; \\ A_3 = -0.08145383165. \end{array} \right\} \quad (9)$$

В качестве меры чувствительности коэффициентов передаточной функции (6) использована оценка частных производных

$$S_x^1(y) = \frac{\partial y}{\partial x}, \quad (10)$$

где y – коэффициенты передаточной функции, а x – коэффициенты разложения (8). Оценки чувствительности представлены в Таблице 1.

Таблица 1 – $S_{B_i}^1(b_j)$, $S_{B_i}^1(a_j)$, $S_{A_i}^1(b_j)$, $S_{A_i}^1(a_j)$ для ЦФ, показанного на рис. 1

	b_0	b_1	b_2	b_3	a_1	a_2	a_3
B_1	0	-0.0057945	-0.0058112	-0.0021529	0.22303961	-0.1285969	0.04736566
B_2	0	0.00017573	0.00231847	0.00085060	0.00837125	0.06943391	-0.0187138
B_3	0	-0.0000569	-0.0003211	-0.0005585	-0.0027118	-0.0020960	0.01228742
A_1	0	-0.5856761	2.43379929	-0.1666932	-28.382807	27.3766019	-9.7941796
A_2	0	0.07579111	0.00738084	-0.7999905	3.59630811	-17.150738	7.43939951
A_3	0	-0.0841787	-0.2439561	-0.2041248	-3.9943014	7.95816652	-5.6700348

Анализ результатов показывает, что большинство оценок по абсолютной величине не превышает единицы. Это означает, что чувствительность характеристик фильтра к соответствующим коэффициентам меньше, чем для прямой и канонической форм. Однако оценки $S_{A_1}^1(b_2)$, $S_{A_1}^1(a_1)$, $S_{A_1}^1(a_2)$, $S_{A_1}^1(a_3)$, $S_{A_2}^1(a_1)$, $S_{A_2}^1(a_2)$, $S_{A_2}^1(a_3)$, $S_{A_3}^1(a_1)$, $S_{A_3}^1(a_2)$, и $S_{A_3}^1(a_3)$ неудовлетворительны.

Таким образом, реализация, показанная на рис. 1 с точки зрения чувствительности, не имеет преимуществ по сравнению с прямой и канонической формами.

Заключение

Проанализирована чувствительность лестничных структур для реализации рекурсивных цифровых фильтров, основанная на разложении передаточных функций в непрерывные дроби. В качестве меры структурной чувствительности использовались оценки частных производных коэффициентов передаточной функции по коэффициентам разложения в непрерывную дробь. Анализ показал, что чувствительность коэффициентов передаточной функции к некоторым коэффициентам расширения очень мала. Однако представленные примеры показывают, что чувствительность к некоторым коэффициентам расширения может превышать чувствительность классической прямой и канонической форм. Результаты анализа представлены только для лестничной структуры IА. Однако аналогичные результаты получены и для других упомянутых структур.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Antoniou A. *Digital Signal Processing*. McGraw-Hill Education (India), Pvt Limited, 2006.
2. Doganata Z., Vaidyanathan P. P. *Minimal structures for the implementation of digital rational lossless systems // IEEE Transactions on Acoustics Speech and Signal Processing*. – 1990. – Vol. 38. – Pp. 2058-2074.
3. Erfani S., Peikari B. *Digital design of general LC structures // IEEE Transactions on Circuits and Systems*. – 1978. – Vol. CAS-25. – Issue 5. – Pp. 269-273.
4. Fettweis A. *Wave digital filters: Theory and practice // Proceedings of the IEEE*. – 1986. – Vol. 74. – Issue: 2. – Pp. 270-327.
5. Gang Li, Yong Ching Lim, Chaogeng Huang. *All-pass based robust low complexity structures for implementing recursive digital filters // IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS), Melbourne VIC, Australia, June 1-5, 2014*. – Pp. 974-977.
6. Lesnikov V., Naumovich T., Chastikov A. *The use of redundancy in the structural synthesis of IIR digital filters // 2016 IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS), Yerevan, Armenia, 14-17 Oct. 2016*.
7. Mitra S.K. *Digital Signal Processing: A Computer-based Approach*. McGraw-Hill/Irwin, 2001.
8. Mitra S.K., Sherwood R.J. *Canonic realizations of digital filters using the continued fraction expansion // IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics*. – Vol. AU-20. – Issue 3. – Pp. 185-194.

9. Mitra S.K., Sherwood R.J. *Digital Ladder Networks // IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics.* – 1973. – Vol AU-21. – Issue 1. – Pp. 30-36.
10. Mitra S.K., Sagar A.D. *Additional canonic realization of digital filters using the continued fraction expansion // IEEE Transactions on Circuits and Systems.* – 1974. – Vol. CAS-21. – Issue 1. – Pp. 135-136.
11. Mitra S.K., Huey D., Sherwood R. J. *New methods of digital ladder realization // IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics.* – 1973. – Vol. AU-21. – Issue 6. – Pp. 485-491.
12. Schlichthärle D. *Digital Filters: Basics and Design.* Springer Science & Business Media, 2012.
13. Thiele L. *On the sensitivity of linear state-space systems // IEEE Transactions on Circuits and Systems.* – 1986. – Vol. CAS-33. – Issue 5. – Pp. 502-510.
14. Vaidyanathan P., Mitra S., Neuvo Y. *A new approach to the realization of low-sensitivity IIR digital filters // IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing.* – 1986. – Vol. 34. – Issue 2. – Pp. 350-361.