УДК 517.957

Искендерова Джамиля Абыкаевна,

д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой естественнонаучных дисциплин, доцент,

Международной Академии управления, права, финансов и бизнеса,

г. Бишкек, Кыргызстан;

Токторбаев Айбек Мамадалиевич,

преподаватель кафедры программирования,

Ошский государственный университет,

г. Ош, Кыргызстан

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ МАГНИТНОЙ ЭЛЕКТРОГАЗОДИНАМИКИ

Исследуется система дифференциальных уравнений, описывающая одномерное нестационарное течение вязкого теплопроводного газа с учетом магнитного и электрического полей [2$ 3]. Изучается задача Коши с переменным коэффициентом теплопроводности среды. Доказательство теоремы существования единственного обобщенного решения проводится методом априорных оценок.

Ключевые слова: скорость, плотность, температура, магнитное поле, электрическое поле, обобщенное решение, априорные оценки, существование.

Dzhamilia A. Iskenderova,

doctor of Sciences, Head of natural-science disciplines department, assistant professor,

International Academy of management, right, finances and business,

Bishkek, Kyrgyzstan;

Aibek M. Toktorbaev,

teacher of programming department,

Osh State University,

Osh, Kyrgyzstan

ABOUT ONE MODEL OF THE MAGNETIC ELECTROGAZODINAMICS

The system of differential equations describing one-dimensional nonstationary flow of a viscous heat-conducting gas in the magnetic and electric fields is considered. The Cauchy problem with variable coefficient of thermal conductivity of the medium is study. The proof of the theorem existence of a unique generalized solution is based on the method of a priori estimates.

Keywords*:* speed, density, temperature, magnetic field, electric field, generalized solution, apriori estimates, existence**.**

Система уравнений магнитной ЭГД в массовых лагранжевых координатах имеет вид:

$$\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t}-\frac{\partial u}{\partial x}=0, \qquad \mathrm{v}=\frac{1}{\rho}, \tag{1.a}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu}{\mathrm{v}}\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial p}{\partial x}-\mu_e H\frac{\partial H}{\partial x}+\varepsilon E\frac{\partial E}{\partial x}, \quad p=r\frac{\theta}{\mathrm{v}}, \tag{1.b}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\lambda(\theta,\mathrm{v})}{\mathrm{v}}\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)-p\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\mu}{\mathrm{v}}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\frac{\mu_e\mu_H}{\mathrm{v}}\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2+b\varepsilon\mathrm{v}E^2\frac{\partial E}{\partial x}, \tag{1.c}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{v}H=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu_H}{\mathrm{v}}\frac{\partial H}{\partial x}\right), \tag{1.d}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t}=-bE\frac{\partial E}{\partial x}, \tag{1.e}$$

здесь $u(x,t), \rho(x,t), \mathrm{v}(x,t), \theta(x,t), p(x,t), H(x,t), E(x,t)$ соответственно: скорость, плотность, удельный объем, температура, давление, напряженность магнитного поля, напряженность электрического поля.

Коэффициенты $\mu, \varepsilon, \lambda, \mu_e, \mu_H, b, r$ – положительные постоянные.

В начальный момент времени $t=0$ значения функций $\mathrm{v}, u, \theta, H, E$ предполагаются известными:

$$u|_{t=0}=u_0(x), \mathrm{v}|_{t=0}=\mathrm{v}_0(x), \theta|_{t=0}=\theta_0(x), E|_{t=0}=E_0(x), H|_{t=0}=H_0(x), |x|<\infty$$

, 2)

причем $(\mathrm{v}_0, u_0, \theta_0, H_0, E_0)$ – непрерывные, $0<m_0\le(\mathrm{v}_0,\theta_0)\le M_0<\infty$ и имеют конечные пределы на бесконечности:

$$\lim_{|x|\to\infty}u_0(x)=0, \lim_{|x|\to\infty}E_0(x)=0, \lim_{|x|\to\infty}H_0(x)=0,$$
$$\lim_{|x|\to\infty}\mathrm{v}_0(x)=\mathrm{v}_\infty=1, \lim_{|x|\to\infty}\theta_0(x)=\theta_\infty=1. \tag{3}$$

(не нарушая общности, можно принять v_∞, θ_∞ равными единице)

ТЕОРЕМА. *Пусть* $\lambda(\theta,\mathrm{v})=\chi\theta$ или $\lambda(\theta,\mathrm{v})=\chi\mathrm{v}$, $\chi=const>0$, *начальные данные (2) обладают следующими свойствами гладкости:*

$(\mathrm{v}_0-1, u_0, \theta_0-1, H_0, E_0)\in W_2^1(R)$.

Тогда в полосе $\Pi = R\times(0,T)$, $R=(-\infty,\infty)$ *с произвольной конечной высотой* T, $0<T<\infty$ *существует единственное обобщенное решение задачи (1),(2), удовлетворяющее уравнениям и начальным данным почти всюду, причем*

$$(\mathrm{v}(t), E(t))\in L_\infty(0,T;W_2^1(R)), (\mathrm{v}_t,\, u_t,\, \theta_t,\, H_t,\, E_t\,)\in L_2(\Pi),$$

$$(u(t),\theta(t), H(t)\,)\in L_\infty(0,T;W_2^1(R))\cap L_2(0,T;W_2^2(R)), \quad \Pi = R\times(0,T),\ R=(-\infty,\infty),$$

$\mathrm{v}(x,t)$, $\theta(x,t)$ *– строго положительные, ограниченные функции.*

Доказательство теоремы проводится методом априорных оценок. Выводятся глобальные априорные оценки, положительные постоянные C_i, N_i в которых зависят только от данных задачи и величины T интервала времени, но не зависят от промежутка существования локального решения. Локальная теорема существования доказывается аналогично [1, с. 68; 5, с. 346]. На основе полученных глобальных априорных оценок локальное решение продолжается на весь промежуток времени $[0,T]$, $0<T<\infty$.

Не ограничивая общности, примем все положительные постоянные в системе (1), равными единице. Предположим, что существует решение задачи (1)-(3).

Из уравнений системы (1) и ограничений на данные задачи видно, что функции $\mathrm{v}(x,t)$, $\theta(x,t)$ неотрицательны. Из [6, с. 129] следует:

$$E_x \ge 0,\ \forall (x,t)\in Q. \tag{4}$$

ЛЕММА 1. При выполнении условий теоремы имеет место оценка

$$U(t)+\int_0^t W(\tau)\,d\tau \le N_1, \quad \forall t\in[0,T], \tag{5}$$

где $U(t)=\int \left\{\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{2}\mathrm{v}H^2+\frac{1}{2}\mathrm{v}E^2+(\,\mathrm{v}-\ln \mathrm{v}-1)+(\theta-\ln\theta-1)\right\}dx,$

$$W(t)=\int\left\{\frac{u_x^2}{\mathrm{v}\theta}+\frac{H_x^2}{\mathrm{v}\theta}+\frac{\lambda(\theta,\mathrm{v})\theta_x^2}{\mathrm{v}\theta^2}+\frac{\mathrm{v}E^2E_x}{\theta}\right\}dx.$$

Интегралы по x берутся в пределах от $-\infty$ до ∞.

Доказательство. Умножим уравнение (1.a) на $\left(\frac{1}{2}E^2+1-\frac{1}{\mathrm{v}}\right)$, (1. b) на u, (1.c) на $\left(1-\frac{1}{\theta}\right)$, (1.d) на H, (1.e) на $E\mathrm{v}$ [4, с. 26]. Затем сложим.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{(\mathrm{v}-\ln\mathrm{v}-1)+\frac{1}{2}u^2+(\theta-\ln\theta-1)+\frac{1}{2}\mathrm{v}H^2+\frac{1}{2}\mathrm{v}E^2\right\}=$$

$$=u_x+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{uu_x}{\mathrm{v}}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\theta}{\mathrm{v}}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{H^2}{2}u\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{2}E^2\right)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\lambda(\theta,\mathrm{v})\theta_x}{\mathrm{v}}-\frac{\lambda(\theta,\mathrm{v})\theta_x}{\mathrm{v}\theta}\right)-\frac{\lambda(\theta,\mathrm{v})\theta_x^2}{\mathrm{v}\theta^2}-\frac{u_x^2}{\mathrm{v}\theta}-\frac{H_x^2}{\mathrm{v}\theta}-\frac{\mathrm{v}E^2E_x}{\theta}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mathrm{v}}HH_x\right).$$

Проинтегрируем полученное равенство по $\Pi=R\times(0,T)$, $R=(-\infty,\infty)$.

$$\int\left\{\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{2}\mathrm{v}H^2+\frac{1}{2}\mathrm{v}E^2+(\mathrm{v}-\ln\mathrm{v}-1)+(\theta-\ln\theta-1)\right\}dx+$$

$$+\int_0^t\int\left[\frac{u_x^2}{\mathrm{v}\theta}+\frac{H_x^2}{\mathrm{v}\theta}+\frac{\lambda(\theta,\mathrm{v})\theta_x^2}{\mathrm{v}\theta^2}+\frac{E_xE^2\mathrm{v}}{\theta}\right]dxd\tau=$$

$$=\int\left\{\frac{1}{2}u_0^2+\frac{1}{2}\mathrm{v}_0H_0^2+\frac{1}{2}\mathrm{v}_0E_0^2+(\mathrm{v}_0-\ln\mathrm{v}_0-1)+(\theta_0-\ln\theta_0-1)\right\}dx.$$

Учитывая условия теоремы, выводим оценку (5). Лемма 1 доказана.

Следуя [1, с.77], разобьем числовую ось R и соответственно полосу Π на конечные отрезки и прямоугольники при $N=0,\pm1,\pm2,\ldots$:

$$R=\bigcup_{N=-\infty}^{\infty}\overline{\Omega}_N,\quad \Pi=\bigcup_{N=-\infty}^{\infty}\overline{Q}_N,\ \Omega_N=\{x\,|\,N<x<N+1\},\ \ Q_N=\Omega_N\times(0,T).$$

Возьмем произвольным образом один из таких прямоугольников. Так как в (5) функции $(\mathrm{v}-\ln\mathrm{v}-1),(\theta-\ln\theta-1)$ неотрицательны при $\mathrm{v}>0,\ \theta>0$, то

$$U_N(t)+\int_0^t W_N(\tau)\,d\tau\le N_1, \tag{6}$$

где интегралы в определении U_N и W_N берутся по Ω_N.

Из (6) следуют оценки [1, с. 78]

$$\int_{N}^{N+1} \mathrm{v}(x,t)dx \le N_2, \quad \int_{N}^{N+1} \theta(x,t)dx \le N_3, \quad \forall t \in [0,T]. \tag{7}$$

Из (7) вытекает, что при любом $t \in [0,T]$ в каждой области $\overline{\Omega}_N$ существуют точки $a(t) = a_N(t) \in [N, N+1]$, $a_1(t) = a_{1N}(t) \in [N, N+1]$ такие, что

$$\mathrm{v}(a(t),t) \le C_1, \quad \theta(a_1(t),t) \le C_2 \ . \tag{8}$$

Умножим уравнение напряженности электрического поля (1.e) на E

$$\frac{1}{2}\frac{\partial E^2}{\partial t} + \frac{1}{3}\frac{\partial E^3}{\partial x} = 0. \tag{9}$$

После интегрирования по $\Pi = R \times (0,T)$, из условий теоремы вытекает оценка

$$\| E(t)\|^2 \le N_4. \tag{10}$$

Проинтегрируем уравнение (9) по x от $-\infty$ до произвольного $x \in R$, а затем по t. Применяя неравенство Гельдера, выводим:

$$\int_0^t E^2(x,\tau)\,d\tau \le N_5, \forall t \in [0,T]. \tag{11}$$

Из уравнений системы (1.a) и (1.b), рассуждая аналогично [6, с.133], выводится одно вспомогательное соотношение между искомыми функциями в каждом из прямоугольников $\overline{Q}_N$.

$$\mathrm{v}(x,t) = I^{-1}(t)B^{-1}(x,t)[\mathrm{v}_0(x) + \int_0^t \left(\theta + \frac{1}{2}\mathrm{v}H^2\right)(x,\tau)I(\tau)B(x,\tau)d\tau], \tag{12}$$

где $B(x,t) = \exp\left\{\int_{a(t)}^{x} (u_0(\xi) - u(\xi,t))d\xi + \int_0^t \frac{E^2}{2}(x,\tau)d\tau\right\}$,

$$I(t) = \mathrm{v}_0(a(t))\exp\left\{\int_0^t \left(\frac{\theta}{\mathrm{v}} + \frac{1}{2}H^2 - \frac{1}{2}E^2\right)(a(t),\tau)d\tau\right\}.$$

Из оценок (5), (11) следует

$$0 < C_3^{-1} \le B(x,t) \le C_3, \quad \forall (x,t) \in Q_N. \tag{13}$$

Из (12) после интегрирования по Ω_N и применения леммы Гронуолла [1, с. 33] с учетом оценок (5), (13), аналогично [6, с. 134], выводится оценка

$$0 < C_4^{-1} \le I(t) \le C_4, \quad \forall t \in [0,T]. \tag{14}$$

Пусть $h(x,t)$ – непрерывная функция. Введем обозначения

$$M_h(t) = \max_{|x|<\infty} h(x,t), \quad m_h(t) = \min_{|x|<\infty} h(x,t).$$

ЛЕММА 2. При выполнении условий теоремы имеют место оценки

$$m_{\mathrm{v}}(t) \ge N_6, \quad m_\theta(t) \ge N_7, \quad \forall t \in [0,T].$$

Доказательство. Из (12) – (14) выводим ограниченность снизу удельного объема. Строгая положительность температуры вытекает из уравнения теплопроводности (1.с). Лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. При выполнении условий теоремы имеют место оценки

$$\int_0^t \left(M_\theta(\tau) + M_H^2(\tau) \right) d\tau \le N_8, \quad \forall t \in [0,T] \tag{15}$$

Доказательство. Используя (8), получим

$$\max_{\overline{\Omega}_N} \theta^{1/2}(t) \le C_2^{1/2} + \frac{1}{2} \int_N^{N+1} \left| \frac{\theta_x}{\theta^{1/2}} \right| dx \le C_2^{1/2} + \frac{1}{2} \left(\int_N^{N+1} \frac{\lambda(\theta,\mathrm{v})}{\mathrm{v}\theta^2} \theta_x^2 \, dx \right)^{1/2} \left(\int_N^{N+1} \frac{\mathrm{v}\theta \, dx}{\lambda(\theta,\mathrm{v})} \right)^{1/2}.$$

Отсюда, с учетом (7) находим

$$M_\theta(t) \le C_5 \left(1 + \int \frac{\lambda(\theta,\mathrm{v})\theta_x^2}{\mathrm{v}\theta^2} dx \right).$$

Далее, применяя неравенство Коши и (5), имеем

$$M_H^2(t) \le 2\int |HH_x| \, dx \le 4 \left(\int \frac{H_x^2}{\mathrm{v}\theta} dx \right)^{1/2} \left(\int \frac{1}{2} \mathrm{v} H^2 dx \right)^{1/2} M_\theta^{1/2}(t) \le$$

$$\le 4N_1^{1/2} C_5^{1/2} \left(\int \frac{H_x^2}{\mathrm{v}\theta} dx \right)^{1/2} \left(1 + \int \frac{\lambda(\theta,\mathrm{v})\theta_x^2}{\mathrm{v}\theta^2} dx \right)^{1/2} \le C_6 \left(\int \frac{H_x^2}{\mathrm{v}\theta} dx + \int \frac{\lambda(\theta,\mathrm{v})\theta_x^2}{\mathrm{v}\theta^2} dx + 1 \right).$$

Интегрируя $M_\theta(t)$, $M_H^2(t)$ по t с учетом (5), выводим оценку (15). Лемма 3 доказана.

ЛЕММА 4. При выполнении условий теоремы имеет место оценка

$$M_{\mathrm{v}}(t) \le N_9, \quad \forall t \in [0,T].$$

Доказательство. Из представления (12), с учетом (13), (14), вытекает неравенство

$$M_{\mathrm{v}}(t) \le C_7 \left[1 + \int_0^t \left(M_\theta(\tau) + M_H^2(\tau) M_{\mathrm{v}}(\tau) \right) d\tau \right].$$

Применение леммы Гронуолла с учетом (5), (15) дает ограниченность удельного объема. Лемма 4 доказана.

ЛЕММА 5. При выполнении условий теоремы имеют место оценки

$$\max_{0 \le t \le T} \| E_x(t) \|^2 + \int_0^T \int E_x^3 \, dx dt \le N_{10}, M_E^2(t) \le N_{11}, \quad \forall t \in [0, T]. \qquad (16)$$

Доказательство. Продифференцируем (1.e) по x и умножим на E_x.

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} E_x^2 + E_x^3 = -E E_x E_{xx}.$$

Проинтегрируем по $\Pi = R \times (0, T)$. После некоторых преобразований [4, с. 13] получим оценки (16). Лемма 5 доказана.

ЛЕММА 6. При выполнении условий теоремы имеют место оценки

$$\int_0^T \left(\| u_x(t) \|^2 + \| H_x(t) \|^2 \right) dt \le N_{12}. \qquad (17)$$

Доказательство. Умножим уравнения (1.b) на u и (1.d) на H, проинтегрируем по R и сложим.

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\| u \|^2 + \int \mathrm{v} H^2 dx \right) + \int \frac{1}{\mathrm{v}} \left(u_x^2 + H_x^2 \right) dx = \int \left(\frac{\theta - 1}{\mathrm{v}} u_x + \frac{1}{\mathrm{v}} u_x - \frac{1}{2} E^2 u_x \right) dx. \qquad (18)$$

Для оценки первого слагаемого в правой части (18) разобьем числовую прямую на области $\sigma_1(t), \sigma_2(t), \sigma_3(t)$ следующим образом:

$$\sigma_1(t) = \{ x \in R : \theta(x,t) > C_8 \}, \quad C_8 = const > 1,$$

$$\sigma_2(t) = \{ x \in R : N_7 \le \theta(x,t) \le C_8, \ \ \theta(x,t) \ne 1 \}, \quad \sigma_3(t) = \{ x \in R : \theta(x,t) = 1 \}.$$

Заметим, что если $C_8 \le N_7$, то R совпадает с областью $\sigma_1(t)$.

Нетрудно проверить, что

$$\text{в } \sigma_1(t): \ \frac{\theta - 1}{\theta - \ln\theta - 1} < C_9, \text{ а в } \ \sigma_2(t): \frac{|\theta - 1|}{\sqrt{\theta - \ln\theta - 1}} < C_{10}.$$

Применяя неравенства Коши и Юнга с ε и учитывая ограниченность удельного объема, (5), имеем

$$\int \frac{\theta-1}{\mathrm{v}} u_x dx = \int\limits_{\sigma_1(t)} (\theta - \ln\theta - 1) \frac{\theta-1}{\theta-\ln\theta-1} \frac{u_x}{\mathrm{v}} dx + \int\limits_{\sigma_2(t)} \sqrt{\theta-\ln\theta-1} \frac{\theta-1}{\sqrt{\theta-\ln\theta-1}} \frac{u_x}{\mathrm{v}} dx \le$$

$$\le C_{11} \left(\int (\theta - \ln\theta - 1) dx \right)^{1/2} \left(\int \frac{1}{\mathrm{v}} u_x^2 dx \right)^{1/2} \left(M_\theta^{1/2}(t) + 1 \right) \le \varepsilon_1 \int \frac{1}{\mathrm{v}} u_x^2 \, dx + C_\varepsilon (M_\theta(t) + 1),$$

где $0 < \varepsilon_1 < 1/2$. Преобразуем второе слагаемое в правой части (18).

$$\int \frac{1}{\mathrm{v}} u_x dx = \int \frac{\partial \ln \mathrm{v}}{\partial t} dx = -\frac{d}{dt} \int (\mathrm{v} - \ln \mathrm{v} - 1) \, dx + \int \frac{\partial u}{\partial x} dx = -\frac{d}{dt} \int (\mathrm{v} - \ln \mathrm{v} - 1) \, dx.$$

Оценим третье слагаемое в (18) с учетом (10), (16).

$$\int \left| \frac{1}{2} E^2 u_x \right| dx \le C_{12} \left(\int \frac{1}{\mathrm{v}} u_x^2 dx \right)^{1/2} \left(\int E^2 dx \right)^{1/2} \le \varepsilon_2 \int \frac{1}{\mathrm{v}} u_x^2 \, dx + C_{13},$$

где $0 < \varepsilon_2 < 1/2$. Подставляя полученные соотношения в (18), после интегрирования по t, с учетом (5), (15) выводим оценку (17). Лемма 6 доказана.

Рассуждая аналогично, можно получить все априорные оценки, необходимые для доказательства теоремы. Единственность показывается стандартным методом – составлением однородного уравнения для разности двух возможных решений. Теорема полностью доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. – Новосибирск: Наука, 1983. – 319 с.*
2. *Бай Ши-и. Магнитная газодинамика и динамика плазмы. – М.: Мир, 1964. – 301с.*
3. *Ватажин А.Б.и др. Электрогазодинамические течения. – М.: Наука, 1983. – 344с.*
4. *Искендерова Д.А., Токторбаев А.М. Разрешимость одной модели магнитной электрогазодинамики // Приволжский научный вестник. – Ижевск, 2016. – № 3(55) – С. 8-15.*
5. *Смагулов Ш.С., Дурмагамбетов А.А., Искендерова Д.А. Задачи Коши для уравнений магнитной газовой динамики // Дифференц. уравнения. – 1993. – Т. 29, № 2. – С. 337-348.*
6. *Файзуллина Н.Т. Корректность краевой задачи электрогазодинамики для модели вязкого теплопроводного газа // Динамика сплошной среды. – 1990. – Вып. 97. – С. 124-145.*