УДК 372.851

Якушева Альбина Константиновна,
учитель математики;
Ширяева Ксения Константиновна,
учащаяся;
Селезнева Светлана Сергеевна,
учащаяся,
МБОУ «Лицей №17»
г. Березовский, Кемеровская область, Россия

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ ПРОФИЛЬНОГО УРОВНЯ

В статье рассматривается вариант решения задачи №16 из типового экзаменационного сборника «ЕГЭ. Математика. Профильный уровень».

Ключевые слова: математика, ЕГЭ, профильный уровень, решение задачи.

Albina K. Yakusheva,
mathematics teacher;
Kseniya K. Shiryayeva,
student;
Svetana S. Selezneva,
student,
MBEI «Lyceum №17»
Berezovskiy, Kemerovskaya region, Russia

SOLUTION OF MATHEMATICS TASKS OF PROFILE LEVEL

The article deals with the solution of the task No.16 of the standard examination book «SES. Mathematics. Profile level».

Keywords*:* math, SES, profile level, the solution of the problem.

Вариант № 10, задача №16.

Условие: Две окружности касаются внутренним образом в точке К, причём меньшая проходит через центр большей. Хорда MN большей окружности касается меньшей в точке С. Хорда КМ и KN пересекают меньшую окружность в точках A и B соответственно, а отрезки KC и AB пересекаются в точке L.

Задания:

а) доказать, что CN:CM=LB:LA;

б) найти MN, если LB:LA=2:3, а радиус малой окружности равен $\sqrt{23}$.

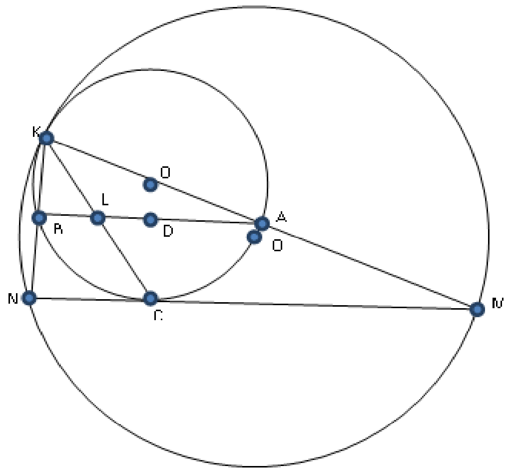

Рисунок 1 – Чертёж, сделанный по заданию

Построим окружность с центром в точке O_1, затем проведём меньшую окружность с центром в точке O_2. Меньшая окружность касается большей в точке K и проходит через её центр. Проведём хорду MN, хорду большей окружности, она касается меньшей окружности в точке C. Проведем хорду KN, она пересекается с меньшей окружностью в точке B. Проведем хорду KM, она пересекается с меньшей окружностью в точке A. Соединим K и C , а также A и B; отрезки KC и AB пересекаются в точке L.

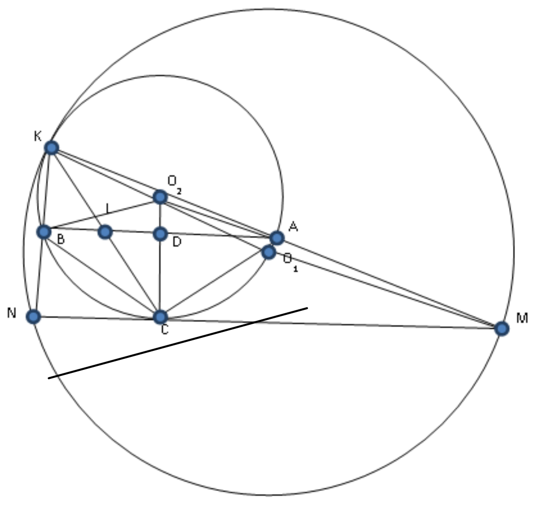

Рисунок 2 – Чертёж с дополнительными построениями

Выполним дополнительные построения. Соединим K и O_1, M и O_1, а также O_2 и A.

Рассмотрим треугольники KMO_1 и KAO_2. Угол K у этих треугольников общий. KO_2=AO_2, так как это – радиусы меньшей окружности, KO_1=MO_1, так как это – радиусы большей окружности.

Из всего перечисленного можно сделать вывод, что оба эти треугольника – равнобедренные, а значит угол K равен углу KAO_2, и он же равен углу KMO_1. Так оба этих угла равны K, мы можем сделать вывод, что они равны между собой. Соответственно, углы KAO_2 и KMO_1 при прямых AO_2 и MO_1 и секущей KM равны, а значит AO_2 параллельны MO_1, а также O_2 является серединой KO_1, значит, и A – середина KM (по теореме Фалеса).

Выполним дополнительные построения. Соединим B и O_2, и N и O_1.

Рассмотрим треугольники KBO_2 и KNO_1. Угол K у этих треугольников общий. KO_2=BO_2, так как это радиусы меньшей окружности, KO_1=NO_1, так как это – радиусы большей окружности. Из всего перечисленного можно сделать вывод, что оба этих треугольника – равнобедренные, а значит угол K равен углу KBO_2, и он же равен углу KNO_1. Так оба этих угла равны K, можно сделать вывод, что они равны между собой. Соответственные углы KBO_2 и KNO_1 при прямых BO_2 и NO_1 и секущей KN равны, а значит BO_2 параллельны NO_1. А также O_2 является серединой KO_1, значит, и B – середина KN (по теореме Фалеса).

Рассмотрим треугольники NKM и BKA. Так как A и B являются серединами KM и KN соответственно, то AB – средняя линяя треугольника NKM.

Рассмотрим треугольники NKC и BKL. BL является частью AB, а значит, BL – средняя линия треугольника NKC. BL отделяет в треугольнике NKC, треугольник ему подобный, а именно BKL. Из этого можно сделать следующий вывод: KB:KN=BL:NC, а коэффициент подобия равен 1/2.

Рассмотрим треугольники MKC и AKL. AL является частью AB, значит, AL – средняя линия треугольника MKC. AL отделяет в треугольнике MKC треугольник ему подобный, а именно AKL. Из этого мы можем сделать следующий вывод: KA:KM=AL:MC, а коэффициент подобия равен 1/2.

BL:NC=LA:CM, а коэффициент подобия также равен 1/2. Используя свойство крайних членов пропорции, можно записать это отношение так: BL:LA=NC:CM ч. и т.д.

Теперь перейдем к решению второй части задачи. Для начала выполним дополнительное построение: соединим O_2 и C.

CO_2 пересекается с AB в точке D. Угол O_2CM равен 90 градусам, так как касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведённому в точку касания.

Рассмотрим треугольник BO_2A: O_2D перпендикулярен AB, так как AB параллельно MN, а угол O_2CM равен 90 градусам.

Рассмотрим треугольники BO_2D и AO_2D. Они равны по первому признаку равенства треугольников. Раз треугольники равны, значит AD=BD.

Выполним дополнительные построения, соединим B и D, и A с D.

Рассмотрим треугольники BDC и CDA. Они равны по первому признаку равенства треугольников. Раз треугольники равны, значит AC=BC.

Из всего вышеперечисленного можно сделать вывод, что углы NKC и CKA равны, так как опираются на равные дуги.

Обозначим градусную меру этих углов α.

А теперь выразим все стороны NKC через x.

BL=x

LA=1,5x

NC=2x

CM=3x

$KC=x\sqrt{6}$.KC. Нашли по свойству хорд (произведения отрезков одной из двух пересекающихся хорд равно, произведению отрезков другой хорды).

$NK=2x\sqrt{2}$. Нашли с помощью теоремы о квадрате касательной.

$AM=\frac{3x}{\sqrt{2}}$. Нашли с помощью теоремы о квадрате касательной.

KM=$3x\sqrt{2}$

Из теоремы косинусов мы получим следующее выражение:

$MC^2=KC^2 + KM^2 - 2KC \cdot KM \cdot \cos\alpha$.

Подставив значение сторон и приведя подобные, мы найдем, что $\cos\alpha$ равен $\frac{5\sqrt{3}}{12}$.

Затем, используя основное тригонометрическое тождество, найдем $\sin\alpha$. А уже потом, используя формулу двойного аргумента, найдем $\sin 2\alpha$. И наконец, по теореме синусов мы можем найти MN.

Ответ: MN=$\frac{115}{6}$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *ЕГЭ. Математика. Профильный уровень: типовые экзаменационные варианты: 36 вариантов / под ред. И.В. Ященко. – М.: Издательство «Национальное образование», 2017. – 256 с. – (ЕГЭ. ФИПИ – школе).*