Иванычев Дмитрий Алексеевич,
канд. физ.-мат. наук, доцент,
ФГБОУ ВО «Липецкий государственный технический университет»,
г. Липецк, Россия

МЕТОД ГРАНИЧНЫХ СОСТОЯНИЙ В РЕШЕНИИ ПЛОСКИХ АНИЗОТРОПНЫХ ЗАДАЧ

Метод граничных состояний применен для решения плоских односвязных задач для тел из анизотропного материала с плоскостью упругой симметрии. Разработана идеология построения базисов состояний анизотропной среды, доказан их изоморфизм, выполнено решение первой основной задачи для овального в плане тела в частном случае анизотропии.

Ключевые слова: плоские задачи, анизотропия, основные задачи механики, метод граничных состояний, базис пространств.

Dmitry A. Ivanychev,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
MBPEI of HE «Lipetsk State Technical University»,
Lipetsk, Russia

THE METHOD OF BOUNDARY STATES IN SOLVING PLANE ANISOTROPIC PROBLEMS

The boundary state method is used to solve planar simply connected problems for bodies of an anisotropic material with elastic symmetry plane. Developed the ideology of building of the basis States of an anisotropic medium, they proved the isomorphism executed the decision of the first main tasks for oval body in the particular case of anisotropy.

Keywords: plane problem, anisotropy, the main task of mechanics, the boundary conditions, the basis spaces.

Метод граничных состояний [3] является современным компьютерно-ориентированным методом решения краевых задач механики деформируемого твердого тела. Его основу составляю пространства внутренних и граничных состояний, сопряженных изоморфизмом. Изоморфизм пространств позволяет отыскание внутреннего состояния свести к изучения изоморфного ему граничного состояния. Основную сложность составляет формирование базиса внутренних состояний, который опирается на общее или фундаментальное решение для среды.

С.Г. Лехницким [2] получено общее решение задачи об упругом равновесии однородного цилиндрического анизотропного тела под действием усилий, равномерно распределенных по поверхности тела, и объемных сил. Область поперечного сечения может быть конечной или бесконечной, односвязной или многосвязной; протяженность тела может быть конечной или бесконечной.

Ниже выписано общее решение (приведены только компоненты вектора перемещения) при отсутствии объемных сил, выражающее компоненты тензора напряжений и вектора перемещений через три комплексные переменные, сопряженные аффинными преобразованиями в пренебрежении жестким поворотом сечения:

$$u = -\tfrac{1}{2} A z^2 - \vartheta y z + 2\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3} p_j \Phi_j(z_j),\; v = -\tfrac{1}{2} B z^2 - \vartheta y z + 2\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3} q_j \Phi_j(z_j),$$

$$w = (Ax + By + C)z + 2\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3} r_j \Phi_j(z_j),$$

где все константы определены параметрами анизотропии и условиями равновесия цилиндра в целом, $z_j = x + \mu_j y$, функции $\Phi_j(z_j)$ – аналитические по своим переменным. Предъявленное С.Г. Лехницким решение распадается на классы с выраженным механическим содержанием (плоская деформация, кручение, плоский изгиб).

Рассмотрим, к примеру, плоское деформированное состояние, характеризующееся компонентами напряжений, σ_x, σ_y, σ_{xy} и вектора перемещений u, v, выражения для которых являются «срезом» соответствующих формул при $\Phi_3(z_3) \equiv 0$. Внутреннее состояние определяется наборами компонент вектора перемещений, теноров деформаций и напряжений: $\xi = \{\{u, v\}, \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}\}, \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}\}\}$. Базисные наборы внутренних состояний можно конструировать, генерируя возможные варианты для аналитических функций [1]. Для ограниченного односвязного сечения можно использовать фундаментальную систему многочленов Вейерштрасса:

$$\begin{pmatrix}\Phi_1(z_1)\\ \Phi_2(z_2)\end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} z_1{}^k \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ z_2{}^k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i\,z_1{}^k \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i\,z_2{}^k \end{pmatrix} : k = 1,2,\ldots \right\}.$$

Скалярное произведение в пространстве Ξ внутренних состояний можно определить через внутреннюю энергию упругого деформирования

$$(\xi_1, \xi_2)_\Xi = \int_D (\sigma_x{}^1 \varepsilon_x{}^2 + \sigma_y{}^1 \varepsilon_y{}^2 + 2\sigma_{xy}{}^1 \varepsilon_{xy}{}^2) ds.$$

На границе тела напряжения оставляют «след» в виде поверхностных усилий p_x, p_y, которые вкупе с граничными значениями перемещений образуют граничное состояние $\gamma = \{\{u, v\}, \{p_x, p_y\}\}$.

В силу теорем Бетти, Сомильяны и принципа возможных перемещений оба пространства Ξ, Γ сопряжены гильбертовым изоморфизмом, что позволяет отыскание внутреннего состояния свести к построению изоморфного ему граничного состояния. Последнее существенно зависит от краевых условий; в общем случае проблема сводится к разрешающей системе уравнений относительно коэффициентов Фурье разложения искомых состояний в ряд по элементам ортонормированного базиса, но в случаях первой основной задачи сводится к рутинному вычислению определенных интегралов. При заданных на границе усилиях p_{x0}, p_{y0} коэффициенты Фурье имеют вид $c_j = \int_{\partial D} (p_{x0} u^j + p_{y0} v^j) dl$.

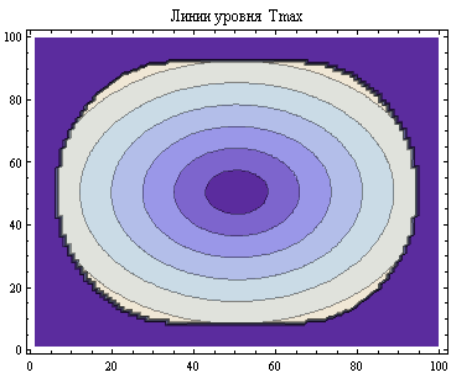

Рисунок 1 – Изохормы

На рис. 1 приведены изохромы для симметричного геометрически и физически тела овальной формы при частном случае анизотропии, в условиях всестороннего сжатия.

Тест граничных условий показал абсолютное совпадение заданных усилий с найденными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванычев Д.А. Решение плоских задач анизотропной упругости методом граничных состояний / В.Б. Пеньков, Д.А. Иванычев // Вести высших учебных заведений Черноземья. Научно-технический и производственный журнал. – Липецк, ЛГТУ. – №2 (20) – 2010. – С. 31–35.

2. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. – М.: ГИТТЛ, 1957. – 463 с.

3. Пеньков В.Б., Пеньков В.В. Метод граничных состояний для решения задач линейной механики // Дальневосточный математический журнал. – 2001. – Т.2, №2.