Иванычев Дмитрий Алексеевич,
канд. физ.-мат. наук, доцент,
ФГБОУ ВО «Липецкий государственный технический университет»,
г. Липецк, Россия

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ИЗОТРОПНОГО КОЛЬЦА

Решена вторая основная задача механики для изотропного кругового кольца методом граничных состояний. Разработана методика формирования решения для двусвязной плоской области. Построены механические поля для определенной граничной задачи. Результат представлен в графическом виде.

Ключевые слова: многосвязная область, изотропные задачи, плоские задачи, метод граничных состояний, краевые задачи.

Dmitry A. Ivanychev,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
MBPEI of HE «Lipetsk State Technical University»,
Lipetsk, Russia

INVESTIGATION OF THE STRESS-STRAIN STATE OF AN ISOTROPIC RING

The first problem of mechanics for an isotropic circular ring is solved by the method of boundary States. A method of forming a solution for a two-connected plane region is developed. Mechanical fields for a certain boundary value problem are constructed. The result is presented in graphical form.

Keywords: multiply connected region, isotropic tasks-dimensional problem, the boundary conditions, boundary value problems.

Рассматривается изотропная пластинка в плане кольцеобразной формы. По краю пластинки равномерно распределены усилия. Формулы комплексного представления Г.В. Колосова – Н.И. Мусхелишвили [М] дают общее решение данной задачи:

$$
\begin{aligned}
&2G(u+iv)=\kappa\varphi(z)-z\overline{\varphi'(z)}-\overline{\psi(z)};\\
&\sigma_x+\sigma_y=4\operatorname{Re}\varphi'(z);\\
&\sigma_y-\sigma_x+2i\sigma_{xy}=2\left[\bar{z}\varphi''(z)+\psi'(z)\right],
\end{aligned}
$$

где $z = x + iy$ – комплексные координаты;

$\varphi(z)$, $\psi(z)$ – функции Колосова – Мусхелишвили;

G – модуль сдвига;

$k = (3-\mu)/(1+\mu)$;

u, v – компоненты вектора перемещений;

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$ – компоненты тензора напряжений;

функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ – аналитические по своим переменным.

Для двусвязной ограниченной области представление для функций Колосова – Мусхелишвили следующее [М]:

$$\varphi(z) = -\frac{1}{2\pi(1+k)}(X+iY)\ln(z) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j z^j;$$
$$\psi(z) = -\frac{k}{2\pi(1+k)}(X-iY)\ln(z) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j z^j,$$

где X и Y – составляющие главного вектора внешних усилий, действующих на внутреннем контуре.

Для реализации плоской задачи предлагается метод граничных состояний [Г]. Внутреннее состояние в методе граничных состояний определяется наборами компонент вектора перемещений, теноров деформаций и напряжений. Базисные наборы внутренних состояний можно конструировать, генерируя возможные варианты для аналитических функций:

$$\begin{pmatrix}\varphi(z)\\ \psi(z)\end{pmatrix} \in \left\{\begin{pmatrix}z^{-1}\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ z^{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}iz^{-1}\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ iz^{1}\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}z^{-n}\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ z^{n}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}iz^{-n}\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ iz^{n}\end{pmatrix} : n = 1,2,\ldots\right\}.$$

На границе тела напряжения оставляют «след» в виде поверхностных усилий p_x, p_y, которые вкупе с граничными значениями перемещений образуют граничное состояние. В пространстве граничных состояний скалярное произведение выражает работу внешних сил:

$$(\xi_1,\xi_2) = \int_D \left(\sigma_x{}^1\varepsilon_x{}^2 + \sigma_y{}^1\varepsilon_y{}^2 + \sigma_z{}^1\varepsilon_z{}^2 + 2\sigma_{xz}{}^1\varepsilon_{xz}{}^2 + 2\sigma_{yz}{}^1\varepsilon_{yz}{}^2 + 2\sigma_{xy}{}^1\varepsilon_{xy}{}^2\right)ds.$$

В силу теорем Бетти, Сомильяны и принципа возможных перемещений оба пространства состояний сопряжены гильбертовым изоморфизмом, что позволяет отыскание внутреннего состояния свести к построению изоморфного ему граничного состояния. Последнее существенно зависит от краевых условий; в общем случае проблема сводится к разрешающей системе уравнений относительно коэффициентов Фурье разложения искомых состояний в ряд по элементам ортонормированного базиса, но в случаях первой и второй основных задач сводится к рутинному вычислению определенных интегралов. При заданных на границе перемещениях u_0, v_0 коэффициенты Фурье рассчитываются так: $c_j = \int\limits_{\partial D} \left(p_x{}^j u_0 + p_y{}^j v_0 \right) dl$

Рассмотрена вторая основная задача для кольца (рис. 1), где в качестве граничных условий задавались следующие перемещения:

$$U(q) = \left[\begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} u = Cos[q], \\ v = 0, \end{array} \right\} (r,q) \in S_1 \\ \left. \begin{array}{l} u = Cos[q], \\ v = 0, \end{array} \right\} (r,q) \in S_2 \\ \left. \begin{array}{l} u = 0, \\ v = 0, \end{array} \right\} (r,q) \in S_3 \end{array} \right.$$

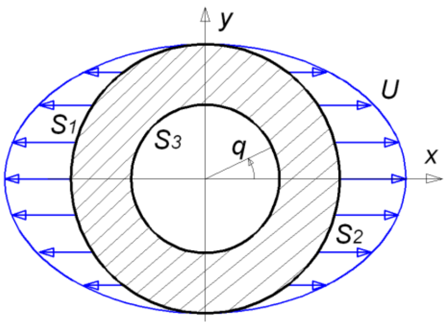
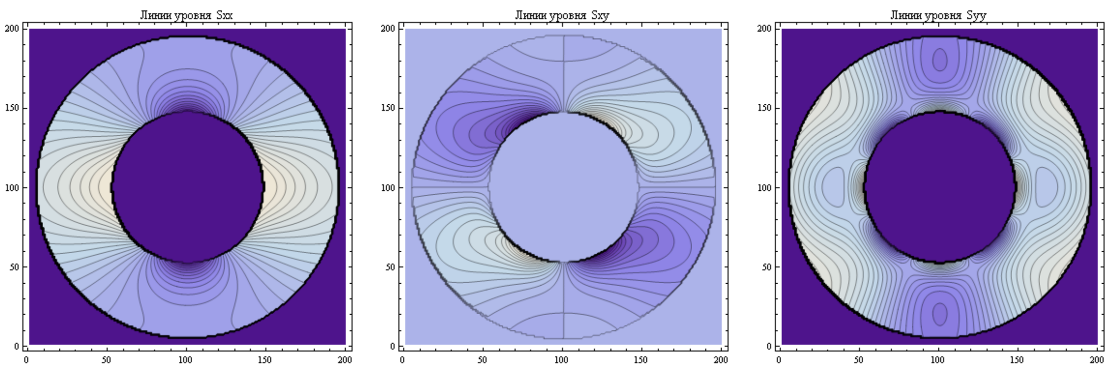


Рисунок 1 – Граничные условия ко второй основной задаче для тела кольцеобразной формы

На рис. 2 приведены изолинии компонент тензора напряжения.



а *б* *в*

Рисунок 2 – Изолинии компонент тензора напряжения:

а – компонента σ_{xx}, *б* – компонента σ_{xy}, *в* – компонента σ_{yy}

Особенность решения второй основной задачи заключается в том, что необходимо заранее знать, что в результате решения главный вектор восстановленных на внутреннем контуре усилий будет равен нулю.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пеньков В.Б., Пеньков В.В. Метод граничных состояний для решения задач линейной механики // Дальневосточный математический журнал. – 2001. – Т.2, №2. – С. 115-137.

2. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707 с.