УДК 372.851

Прокудина Елена Ивановна,

учитель, МБОУ «Средняя школа №3»,

п. Яблоновский, Тахтамукайский район, Республика Адыгея, Россия

РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПАРАМЕТРОМ

Решение уравнений, содержащих параметр, является, пожалуй, одним из самых трудных разделов элементарной математики. При этом данная тема присутствует в заданиях ГИА и ЕГЭ, к которым нужно начинать готовиться заранее.

ЕГЭ по математике сегодня проводится на двух уровнях сложности: базовый и профильный. Профильный содержит задания со сложными уравнениями, неравенствами, требует знаний функций и геометрии. И если для подготовки к «базе» по математике достаточно будет полистать учебники и тетради, то для подготовки к «профилю», возможно, потребуется даже позаниматься с репетитором по математике. Или можно начать заранее готовиться, изучая темы от простого к сложному.

Автор статьи планирует сделать цикл докладов «Решение заданий с параметрами», усложняя темы по мере прохождения курса алгебры.

Ключевые слова: уравнения, параметр, корень, значения, решение, график.

Elena I. Prokudina,

teacher, MBEI «Secondary school №3»,

v. Yablonovskiy, Tahtamukayskiy district, Republic of Adygea, Russia

LINEAR EQUALIZATIONS WITH THE PARAMETER

Decision of equalizations, containing a parameter, is, perhaps, one of the most difficult divisions of elementary mathematics. But, here, this theme is in the tasks of ГИА and ЕГЭ, to that it is already needed to begin to prepare. ЕГЭ on mathematics today conducted on two levels of complication: base and profile. The profile contains tasks with difficult equalizations, inequalities, requires knowledge of functions and geometry. And if for preparation to the «base» on mathematics it will be enough to look through textbooks and notebooks, then for preparation to the «profile», maybe, it will be required even to do some work with a private tutor on mathematics. Или it is possible to begin beforehand to prepare, studying themes from simple to difficult. I plan to do the cycle of lectures Decision of tasks with parameters, complicating a theme as far as passing of course of algebra.

Keywords: equalizations, parameter, root, values, decision, chart.

Если в уравнении некоторые коэффициенты заданы не конкретным числовыми значениями, а обозначены буквами, то они называются параметрами, а уравнение – параметрическим; т.е. уравнения, содержащие помимо неизвестных, еще и буквенные величины, называются уравнениями с параметрами.

Параметры обозначаются буквами латинского алфавита: a, b, c, d…, a неизвестные – буквами x, y, z. Например: $3x+5 = 3x+a$.

Решить уравнение с параметрами – значит указать, при каких значениях параметров существуют решения и каковы они.

Сложность решения состоит в том, что с изменением параметра могут меняться не только коэффициенты примера, но и область допустимых значений, и виды, методы и приёмы решения.

Для начала надо уметь выражать одну переменную через другую.

ПРИМЕР 1. Из формулы $S=Vt$ выразить: а) V, через S и t; б) t, через S и V.

ПРИМЕР 2. Из формулы $P=2(a+b)$ выразить: а) a, через P и b; б) b, через P и a.

При каких значениях переменных имеют смысл эти выражения (формулы)?

Так же можно предложить такое *задание:*

ПРИМЕР 3. Для каждого значения параметра а выясните, какое из чисел больше: 3а или 2а + 1.

Найдем разность данных чисел: 3а – 2а – 1 = а – 1.

При а = 1 разность равна нулю, следовательно, числа равны.

При а > 1 разность положительна, следовательно, первое число больше.

При а < 1 разность отрицательна, следовательно, первое число меньше.

Ответ: при а = 1 числа равны, при а > 1 первое число больше, при а < 1 второе число больше.

Приёмы, используемые для решения уравнений с параметрами, такие же, как и при решении уравнений, содержащих помимо неизвестной только числа.

ПРИМЕР 4. Решить уравнение $ax=1$.

Решение. На первый взгляд представляется возможным сразу дать ответ: $x = \frac{1}{a}$.

Однако при *a=0* данное уравнение решений не имеет и верный *ответ* записывается так: если *a=0*, то *нет решений*; если *a≠0*, то:

$x = \frac{1}{a}$.

При решении линейного уравнения с параметром рассматриваются случаи, при которых параметр равен какому-то особому значению для каждого из уравнений и те, которые отличаются от него. Особым значением параметра a обычно является значение a = 0.

ПРИМЕР 5. Решить уравнение $a^2(x – 1) + 6x = (5x – 2)a$

Преобразуем: $a^2 x + 6x – 5xa = a^2 – 2a$

$x(a^2 – 5a + 6) = a(a – 2)$

$x(a^2 – 2a – 3a + 6) = a(a – 2)$

$x(a – 2)(a – 3) = a(a – 2)$

Для того чтобы выразить x, надо поделить обе части уравнение на *(a – 2)(a – 3)*. Т.к. делить на нуль нельзя, исследуем случаи, когда коэффициент при x равен нулю и когда отличен от нуля.

Если a = 2, то уравнение примет вид 0x = 0, тогда x – любое число.

Если a = 3, то уравнение примет вид 0x = 3. Решений нет.

Если a не равно 2 и 3, то $x = \frac{a\,(a-2)}{(a-2)(a-3)} = \frac{a}{a-3}$.

Ответ: при a = 2 x – любое число; при a = 3 решений нет; при a ≠ 2 и a ≠ 3, $x = \frac{a}{a-3}$.

Попробуйте решить самостоятельно.

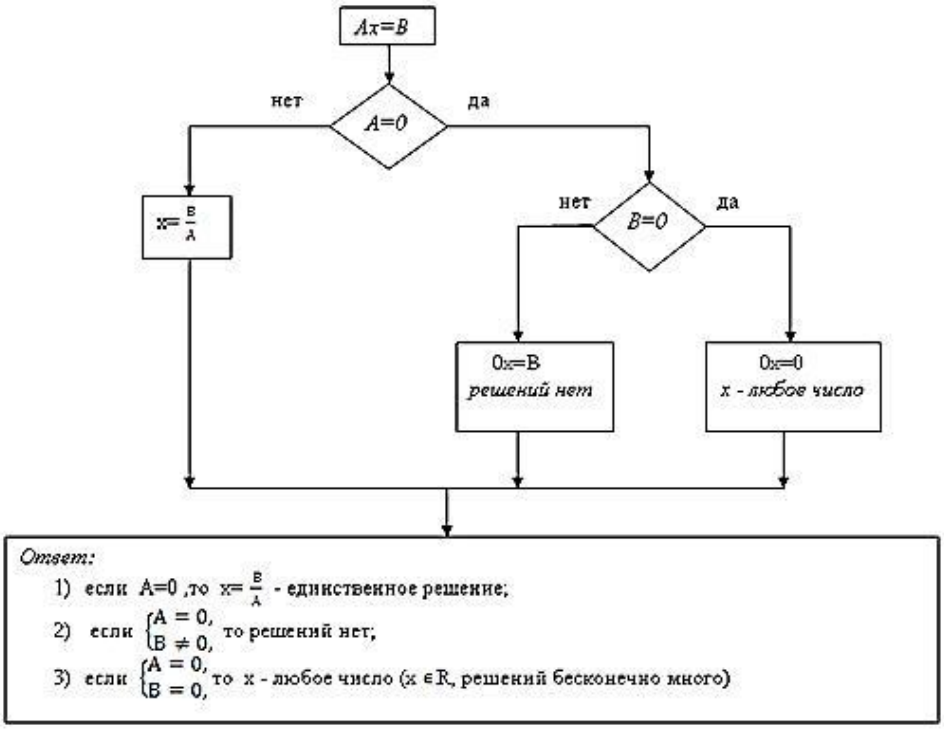
ПРИМЕР 6. (a – 7)(a – 3)x = (a + 1)(a – 7)

a = 7 0x = 0, x – любое число

a = 3 0x = -16, решений нет

$a \neq 3,\ a \neq 7\ x = \frac{(a+1)(a-7)}{(a-7)(a-3)} = \frac{a+1}{a-3}$.

Таким образом любое линейное уравнение с параметрами элементарными преобразованиями может быть приведено к виду *Ax=B*, где *A* и *B* – некоторые выражения, хотя бы одно из которых содержит параметр и исследуется по схеме:



При решении задач, содержащих параметр, включаются задачи, которые условно можно разделить на два больших класса. В первый класс можно отнести задания, в которых надо решить уравнения при всех возможных значениях параметра. Ко второму классу отнесём задания, в которых надо найти не все возможные решения, а лишь те из них, которые удовлетворяют некоторым дополнительным условиям.

ПРИМЕР 7. Найти все натуральные значения *a*, при которых корень уравнения *(a-1)x=12* является

а) натуральным числом; б) неправильной дробью.

Решение: a≠1, так как иначе уравнение не имеет решений;

а) если *a≠1*, то

$x = \frac{12}{a-1}$.

Перебором находим:

При *a=13, x=1;*при *a=7, x=2;*при *a=5, x=3;*при *a=4, x=4;*при *a=3, x=6;* при *a=2, x=12*.

а є {13, 7, 5, 4, 3, 2}.

б) если $a \neq 1$, то

$x = \frac{12}{a-1}$.

Перебором находим, что а є {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13}.

Особый интерес представляют ***уравнения с модулем.***

ПРИМЕР 8. Решить уравнение |x-2|=b.

Так как по определению модуля $|x-2| \geq 0$, то при b<0 данное уравнение решений не имеет. Если b=0, то уравнение имеет решение x=2.

Если b>0, то решениями уравнения являются числа x=2+b и x=2-b.

Ответ: при b<0 решений нет, при b=0 x=2, при b>0 x=2+b и x=2-b.

Попробуйте решить самостоятельно.

ПРИМЕР 9. Решить уравнение |x+6|=c

Ответ: при c<0 решений нет; при c=0 x=-6, при c>0 x=c-6 и x=-c-6

Также уравнения с параметром можно решить ***графическим способом.***

ПРИМЕР 10. Сколько корней в зависимости от параметра *a* имеет уравнение $2|x| - 1 = x + a$

Решение

Рассмотрим отдельно правую и левую часть уравнения.

Построим графики функций $y_1 = 2|x| - 1$ и $y_2 = x + a$

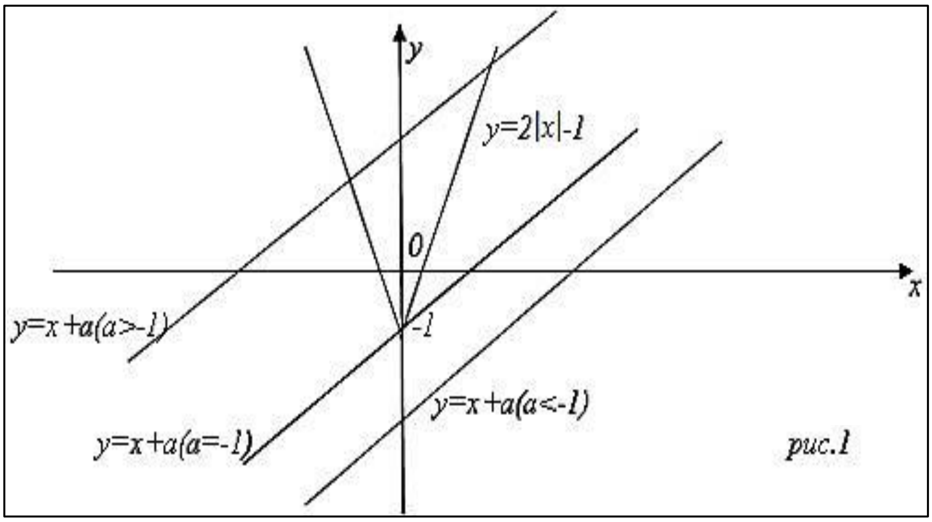
1)$y_1 = 2|x| - 1$

По определению модуля $y_1 = 2|x| - 1 = \begin{cases} 2x - 1, \text{при } x \geq 0 \\ -2x - 1, \text{при } x < 0 \end{cases}$

Графиком является ломаная:

2)$y_2 = x + a$

Графиком является семейство прямых, параллельных прямой y = x.



Эти прямые пересекаются с осью ординат в точках с координатами (0; *a*).

Очевидно, что если *a* будет возрастать, то впервые графики пересекутся тогда, когда прямая пройдет через вершину ломаной, т.е. через точку (0; -1), т.е. при *a=-1*. В этом случае уравнение имеет единственное решение.

Если дальше увеличивать параметр *a*, то точек пересечения будет ровно две – с каждой из ветвей ломаной. В результате этого анализа получаем ответ.

Ответ: при *a<-1* уравнение не имеет корней; при *a=-1* уравнение имеет единственный корень;

При *a>-1* уравнение имеет два корня.

Итак, проделав предложенную работу, обучающийся действительно поймёт, как решаются уравнения с параметрами, приобретёт навык решения и, надеюсь, теперь не столкнётся с трудностями при решении подобных заданий. Автор статьи считает, что работа педагога поможет ученикам успешнее и смелее решать различные задачи с параметрами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. http://открытыйурок.рф/статьи/628776/

2. Башмаков М.И. Уравнения и неравенства. Изд. 2-е, перераб. (Библиотека физ.-мат. школы. Вып.5). – М.; Наука, 1976. – 96 с.

3.Шарыгин И.Ф. Факультативный курс по математике. Решение задач: уч. пособ. для 10 кл. ср. школы. – М.: Просвещение , 1989. – 252 с.

4. Ястребинецкий Г.А. Задачи с параметрами: Книга для учителя. – М.: Просвещение, 1986. – 128 с.