УДК 378.147.34

Игонина Татьяна Романовна,

доцент, канд. физ.-мат. наук,

доцент кафедры высшей математики-2,

Параскевопуло Ольга Ригасовна,

доцент, канд. физ.-мат. наук,

доцент кафедры высшей математики-2,

Пронина Елена Владиславовна,

доцент, канд. физ.-мат. наук,

доцент кафедры высшей математики-2,

ФГБОУ ВО «МИРЭА - Российский технологический университет»,

г. Москва, Россия

О ДОПОЛНЕНИИ К МЕТОДИКЕ ИЗЛОЖЕНИЯ ТЕМЫ «ИНТЕГРИРОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ» В КУРСЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

В статье приведена методика изложения темы «Интегрирование алгебраических иррациональностей». Приведены конкретные примеры и рекомендации по использованию данной методики на семинарских занятиях и в процессе самостоятельной работы студента. Обосновано преимущество излагаемого метода подачи материала.

Ключевые слова: преподавание математики; интеграл; интегральное исчисление; алгебраическая иррациональность; замена переменных

Tatyana R. Igonina,

Assistant professor, PhD in Physical and Mathematical Sciences,

Assistant professor of advanced mathematics chair -2;

Olga R. Paraskevopulo,

Assistant professor, PhD in Physical and Mathematical Sciences,

Assistant professor of advanced mathematics chair -2;

Elena V. Pronina,

Assistant professor, PhD in Physical and Mathematical Sciences,

Assistant professor of advanced mathematics chair -2,

FSBEI HE «MIREA - Russian technical university»,

Moscow, Russia

ABOUT THE ADDITION TO THE TOPIC PRESENTATION METHOD «INTEGRATION OF IRRATIONAL FUNCTIONS» IN THE COURSE OF MATHEMATICAL ANALYSIS

The article presents the topic presentation method «integration of algebraic irrationalities». Specific examples and recommendations on the use of this technique in seminars and in the process of independent work of the student are given. The advantage of the presented presentation method is substantiated.

Keywords: teaching mathematics; integral; integral calculus; algebraic irrationality; transposition

Курс интегрального исчисления является одним из важнейших курсов обучения в технических вузах и одной из фундаментальных составляющих дальнейшего освоения специальных предметов. Успешное овладение важнейшими элементами техники интегрирования зависит от следующих составляющих:

1) знания таблицы основных интегралов;

2) умения безошибочно относить интеграл к конкретному типу;

3) умения пользоваться алгоритмом вычисления интегралов соответствующего типа, грамотно доводя вычисления до нахождения табличного интеграла.

Второй из вышеупомянутых пунктов вызывает у студентов наибольшие трудности на начальном этапе освоения техники взятия интеграла в связи с большим разнообразием видов интегралов и неспособностью обучающихся верно классифицировать тип интеграла. В данной статье на примере изложения темы «Интегрирование иррациональных функций» приводятся методические рекомендации призванные устранить эту проблему.

В современном, визуально и технически насыщенном обществе, когда обучаемому все тяжелее усваивать большой объем поступающей информации в предельно сжатые сроки, необходимо искать новые пути, методы и формы изложения изучаемого материала. Это касается и курса математического анализа. При обучении студентов технических специальностей, на наш взгляд, необходимо сделать упор на умение «применять полученные знания к изучению реальных явлений в технике, физике, биологии..»[3]. В связи с этим, теоретический материал по теме «Интегрирование иррациональных функций» мы предлагаем структурировать в виде таблицы, объединяющей наиболее часто встречающиеся случаи интегрирования функций, содержащих иррациональность. Каждому виду интеграла предлагается замена переменной, приводящая подынтегральную функцию к рациональной или тригонометрической функции, интеграл от которой легче приводится к табличному интегралу. Наглядность такой подачи материала позволяет сделать его более доступным для понимания и дальнейшего использования, повысить эффективность его усвоения, разъяснить взаимосвязь используемых понятий и теорем и показать целостность данного раздела математического анализа.

Введем обозначения: пусть $R(x)$- функция, содержащая иррациональные выражения, например $\sqrt[3]{x}, \sqrt{x^2-a^2}, \sqrt{x^2+a^2}$ и т.д. В зависимости от вида иррациональности при интегрировании $R(x)$ удобно воспользоваться одной из следующих подстановок, в результате которой получаем функцию, которая является рациональной или тригонометрической.

Таблица 1 – Интегрирование некоторых алгебраических иррациональностей

№№ п/п	Вид интеграла	Замена	Интеграл, к которому сводится исходный
I a	$\int R(x,\sqrt[n]{x})dx$	$x=t^n,\ dx=nt^{n-1}dt$	$n\int R(t^n,t)t^{n-1}dt==\int F(t)dt$
I b	$\int R(x,\sqrt[n]{x},\sqrt[m]{x})dx$	$x=t^k,\ dx=kt^{k-1}dt$, где k есть наименьшее общее кратное показателей радикалов n и m	$k\int R(t^k,t^{\frac{k}{n}},t^{\frac{k}{m}})t^{k-1}dt$ $=\int F(t)dt$

II	$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$	$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$, $x = \frac{b - t^n d}{t^n c - a}$, $dx = \frac{nt^{n-1}(ad-cb)}{(t^n c - a)^2} dt$	$n(ad-cb)\int R\left(\frac{b-t^n d}{t^n c - a}, t\right) \cdot \frac{t^{n-1}}{(t^n c - a)^2} dt = \int F(t)dt$
III	$\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})dx$	$x = a \cdot \sin t$ или $x = a \cdot \cos t$ $dx = a \cdot \cos t dt$ или $dx = -a \cdot \sin t dt$	$\int F(\sin t, \cos t)dt$
IV	$\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2})dx$	$x = a \cdot \mathrm{tg} t$ или $x = a \cdot \mathrm{ctg} t$ $dx = \frac{a}{\cos^2 t} dt$ или $dx = \frac{-a}{\sin^2 t} dt$	$\int F(\sin t, \cos t)dt$
V	$\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})dx$	$x = \frac{a}{\cos t}$ или $x = \frac{a}{\sin t}$ $dx = \frac{a \cdot \sin t}{\cos^2 t} dt$ или $dx = \frac{-a \cdot \cos t}{\sin^2 t} dt$	$\int F(\sin t, \cos t)dt$
VI	$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$, $a > 0$ $ax^2 + bx + c > 0$	В выражении $ax^2 + bx + c$ выделяем полный квадрат: $ax^2 + bx + c =$ $= a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c$ $x + \frac{b}{2a} = t$, $dx = dt$, обозначим $\frac{1}{a} \cdot \left(-\frac{b^2}{4a} + c\right) = p^2$	

		Если $\frac{b^2}{4a}-c>0$	$\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-p^2}}$
		Если $\frac{b^2}{4a}-c<0$	$\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+p^2}}$
VII	$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $a<0$, $ax^2+bx+c>0$	Как и выше, в выражении ax^2+bx+c, выделяем полный квадрат и делаем замену $x+\frac{b}{2a}=t$, $dx=dt$ обозначим $\frac{1}{a}\cdot\left(-\frac{b^2}{4a}+c\right)=p^2$	$\frac{1}{\sqrt{-a}}\int\frac{dt}{\sqrt{p^2-t^2}}$ $=\arcsin\frac{t}{p}+C$
VIII	$\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}}$ $ax^2+bx+c>0$	$x=\frac{1}{t}$, $dx=\frac{-dt}{t^2}$	$-\int\frac{1}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{a}{t^2}+\frac{b}{t}+c}}\cdot\frac{dt}{t^2}=$ $=-\int\frac{dt}{\sqrt{ct^2+bt+a}}$ И интеграл сводится к случаям VI или VII

Таблица 1 помогает студентам научиться правильно классифицировать тип интеграла от функции, содержащей иррациональное выражение.

Оценить степень освоения материала и проверить текущее состояние навыков интегрирования рекомендуется с помощью экспресс-теста. Данный тест, содержит несколько простых интегралов, рядом с каждым из которых, не вычисляя его, необходимо поставить тип замены, которую предполагается использовать. Объем задания определяется преподавателем, исходя из степени усвоения материала.

Таблица 2 – Пример экспресс-теста

№	Интеграл	Замена	№	Интеграл	Замена

1	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+3x+4}}dx$		6	$\int \sqrt{9+x^2}dx$	
2	$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[5]{x}}dx$		7	$\int \frac{1}{\sqrt{5-x-2x^2}}dx$	
3	$\int \sqrt{25-x^2}dx$		8	$\int \sqrt{x^2-16}dx$	
4	$\int \sqrt{\frac{4+x}{1-x}}dx$		9	$\int \frac{\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}}dx$	
5	$\int \frac{1}{x\sqrt{4x^2+x+6}}dx$		10	$\int \frac{1}{x\sqrt{4-2x-x^2}}dx$	

Проиллюстрируем на примерах интегрирование алгебраических иррациональностей.

Пример I b. Вычислить интеграл $\int \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt[3]{x^2}}dx$.

Решение:

После рассмотрения подынтегральной функции получаем, что: данный интеграл относится к типу **I b** , так как подынтегральная функция содержит радикалы с разными показателями n=2 и m=3

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt[3]{x^2}}dx = \begin{bmatrix} \text{НОК}(2;3)=6 \\ x=t^6 \\ dx=6t^5dt \end{bmatrix} = \int \frac{t^3}{t^6-t^4}6t^5dt = 6\int \frac{t^4}{t^2-1}dt$$

$$= 6\int \frac{t^4-1+1}{t^2-1}dt = 6\int \left(t^2+1\right)dt + 6\int \frac{dt}{(t-1)(t+1)} =$$

$$= 6\left(\frac{t^3}{3}+t\right) + 6\int \frac{dt}{2(t-1)} - 6\int \frac{dt}{2(t+1)} = 2t^3+6t+3\ln|t-1|-3\ln|t+1|+C$$

$$= 2t^3+6t+3\ln\frac{|t-1|}{|t+1|}+C = 2\sqrt{x}+6\sqrt[3]{x}+3\ln\frac{\left|\sqrt[6]{x}-1\right|}{\left|\sqrt[6]{x}+1\right|}+C$$

Пример II. Вычислить интеграл $\int \frac{1}{(1-x)^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$.

Решение:

После рассмотрения подынтегральной функции получаем, что: данный интеграл относится к типу **II**, так как подынтегральная функция содержит радикал вида $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ с показателем *n*=2

$$\int \frac{1}{(1-x)^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = \begin{bmatrix} \frac{1-x}{1+x} = t^2 \\ x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{-4t}{(1+t^2)^2}dt \end{bmatrix} = \int \frac{\left(1+t^2\right)^2}{4t^4}\cdot t\cdot\left(\frac{-4t}{\left(1+t^2\right)^2}\right)dt$$

$$= \int \frac{-dt}{t^2} = \frac{1}{t} + C = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C.$$

Пример III. Вычислить интеграл $\int \sqrt{9-x^2}dx$.

Решение:

После рассмотрения подынтегральной функции получаем, что: данный интеграл относится к типу **III**, так как подынтегральная функция содержит радикал вида $\sqrt{a^2-x^2}$, где $a=3$.

$$\int \sqrt{9-x^2}dx = \begin{bmatrix} x = 3\sin t \\ dx = 3\cos t dt \end{bmatrix} =$$

$$= \int \sqrt{9-9\sin^2 t}\cdot 3\cos t dt = \int 9\cos^2 t dt = \frac{9}{2}\int (1+\cos 2t)dt =$$

$$= \frac{9}{2}t + \frac{9}{4}\sin 2t + C = \frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3} + \frac{9}{4}\sin 2\left(\arcsin\frac{x}{3}\right) + C.$$

Пример IV. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{(25+x^2)\sqrt{25+x^2}}$.

Решение:

После рассмотрения подынтегральной функции получаем, что: данный интеграл относится к типу **IV**, так как подынтегральная функция содержит радикал вида $\sqrt{a^2+x^2}$, где $a=5$.

$$\int \frac{dx}{(25+x^2)\sqrt{25+x^2}} = \begin{bmatrix} x = 5tgt \\ dx = \dfrac{5}{\cos^2 t}dt \end{bmatrix} =$$

$$= \int \frac{1}{(25+25tg^2 t)\sqrt{25+25tg^2 t}} \cdot \frac{5}{\cos^2 t}dt = \frac{1}{25}\int \frac{1}{(1+\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t})\sqrt{1+\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}} \cdot \frac{1}{\cos^2 t}dt$$

$$= \frac{1}{25}\int \frac{1}{(\frac{\cos^2 t+\sin^2 t}{\cos^2 t})\sqrt{\frac{\cos^2 t+\sin^2 t}{\cos^2 t}}} \cdot \frac{1}{\cos^2 t}dt = \frac{1}{25}\int \cos t dt =$$

$$= \frac{1}{25}\sin t + C = \frac{1}{25}\sin\left(arctg\,\frac{x}{5}\right) + C$$

Пример V. Вычислить интеграл $\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x^3}dx$.

Решение:

После рассмотрения подынтегральной функции получаем, что: данный интеграл относится к типу **V**, так как подынтегральная функция содержит радикал вида $\sqrt{x^2-a^2}$, где $a=4$.

$$\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x^3}dx = \begin{bmatrix} x = \dfrac{4}{\sin t} \\ dx = \dfrac{-4\cos t}{\sin^2 t}dt \end{bmatrix} =$$

$$= \int \sqrt{\frac{16}{\sin^2 t} - 16} \cdot \frac{\sin^3 t}{64} \cdot \left(\frac{-4\cos t}{\sin^2 t}\right)dt = -\int \sqrt{\frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}} \cdot \frac{\sin^3 t}{4} \cdot \left(\frac{\cos t}{\sin^2 t}\right)dt =$$

$$=-\frac{1}{4}\int \cos^2 t dt=-\frac{1}{8}\int (1+\cos 2t)dt=-\frac{1}{8}t-\frac{1}{16}\sin 2t+C=$$

$$=-\frac{1}{8}\arcsin\frac{4}{x}-\frac{1}{16}\sin 2\left(\arcsin\frac{4}{x}\right)+C$$

Пример III. Вычислить интеграл $\int \frac{1}{\sqrt{2x^2-x+3}}dx$.

Решение:

После рассмотрения подынтегральной функции получаем, что: данный интеграл относится к типу **VI**, так как подынтегральная функция содержит радикал вида $\sqrt{ax^2+bx+c}$, где $a=2>0$, $b=-1$, $c=3$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x^2-x+3}}dx=\left[a=2, a>0\right]=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sqrt{x^2-\frac{x}{2}+\frac{3}{2}}}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{23}{16}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\left(x-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2x^2-x+3}\right|+C.$$

Пример IV. Вычислить интеграл $\int \frac{1}{\sqrt{5-2x-3x^2}}dx$.

Решение:

После рассмотрения подынтегральной функции получаем, что: данный интеграл относится к типу **VII**, так как подынтегральная функция содержит радикал вида $\sqrt{ax^2+bx+c}$, где $a=-3<0$, $b=-2$, $c=5$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{5-2x-3x^2}}dx=\left[a=-3, a<0\right]=\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{3}-\frac{2}{3}x-x^2}}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{16}{9}-\left(x+\frac{1}{3}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{3x+1}{4}+C.$$

Пример V. Вычислить интеграл $\int \frac{1}{x \cdot \sqrt{10x^2 - 6x + 1}} dx$.

Решение:

После рассмотрения подынтегральной функции получаем, что: данный интеграл относится к типу **VIII**, так как подынтегральная функция содержит дробь вида $\frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$, где $a = 10$, $b = -6$, $c = 1$.

$$\int \frac{1}{x \cdot \sqrt{10x^2 - 6x + 1}} dx = \begin{bmatrix} x = \frac{1}{t} \\ dx = -\frac{dt}{t^2} \end{bmatrix} = \int \frac{1}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{10}{t^2} - \frac{6}{t} + 1}} \cdot \left(\frac{-dt}{t^2} \right)$$

$$= \int \frac{-dt}{\sqrt{10 - 6t + t^2}} = \int \frac{-dt}{\sqrt{(t-3)^2 + 1}} =$$

$$-\ln\left| (t-3) + \sqrt{t^2 - 6t + 10} \right| + C = -\ln\left| \left(\frac{1}{x} - 3 \right) + \sqrt{\frac{1}{x^2} - 6\frac{1}{x} + 10} \right| + C.$$

Введение данной методики в процесс обучения позволяет значительно повысить самостоятельность и уверенность студентов в выборе метода интегрирования алгебраических иррациональностей и освоении конкретных техник интегрирования, что значительно способствует повышению уровня математической культуры учащихся.

Авторы надеются, что данная статья будет полезна преподавателям и студентам, желающим разобраться в интегрировании алгебраических иррациональностей и систематизировать имеющиеся знания по данному разделу математического анализа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И, Шикин Е.В, Заляпин В.И., Соболев С.К. Вся высшая математика. Интегральное исчисление, дифференциальное исчисление функций нескольких переменных, дифференциальная геометрия. Т. 2. – Москва: Едиториал УРСС, 2000.

2. Горлач Б.А. Ряды. Интегрирование. Дифференциальные уравнения: учебники для вузов. Специальная литература. – Санкт-Петербург: Лань, 2017.

3. Зельдович Я.Б., Яглом И.М. Высшая математика для начинающих физиков и техников. – Москва: Наука, 1982.

4. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Т.2. – Москва: Наука, 1968.