Лебедева Лариса Владимировна,
канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Математические методы в радиофизике»,
ФГАОУ ВО «ННГУ им. Н.И. Лобачевского»,
г. Нижний Новгород, Россия

ДИССИПАТИВНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ ЦИЛИНДРА: УСЛОВИЯ ОТСУТСТВИЯ ГОМОКЛИНИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ

В работе получены аналитические границы области параметров, при которых отсутствует гомоклиническая структура основных гиперболических неподвижных точек одного диссипативного отображения цилиндра

Ключевые слова: диссипативное отображение, гиперболические неподвижные точки, сепаратрисные инвариантные кривые, гомоклиническая структура

Larisa V. Lebedeva,
Ph.D., associate Professor,
Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod,
Nizhny Novgorod, Russia

DISSIPATIVE MAP OF CYLINDER: CONDITIONS OF NO HOMOCLINIC STRUCTURES

The analytical boundaries of the domain of parameters are obtained in the work for which the homoclinic structure of the basic hyperbolic fixed points is absent

Keywords: dissipative map, hyperbolic fixed points, separatrix invariant curves, homoclinic structure

Рассматривается отображение

$$F:\begin{cases}\bar{x}=x+y-a\cdot\sin x\,(\mathrm{mod}\,2\pi),\\ \bar{y}=h\cdot y-b\cdot\sin x\end{cases}\qquad(1)$$

цилиндра $C=\{x,y\,/\,x\in[-\pi,\pi],y\in(-\infty,\infty)\}$. Предполагается, что параметры a, b и h отображения принадлежат области $P=\{\,a,b,h\,/\,0<b<a,0<h<1\}$. Отображение описывает работу ряда физических систем, в частности, широко распространенных в современной радиоэлектронике [5, с. 26; 7, с. 181; 8, с. 74] систем фазовой синхронизации и активно изучаемых в последнее время биологических и медицинских систем [6, с. 97]. Динамика таких систем имеет крайне сложный характер [1, с. 161; 3, с. 15; 8, с. 74; 9, с. 32; 10, с. 3045]. Цель настоящего исследования: определение области параметров, при которых в фазовом пространстве отображения реализуется необходимая для приложений структура множества предельных траекторий (используемые в работе термины см. в [1, с. 161; 10, с. 3045]).

1. Общие свойства отображения. Особенностью рассматриваемого отображения является наличие притягивающего слоя в его фазовом пространстве [4, с. 17].

Теорема 1. Любая траектория фазового пространства отображения (1) приходит в слой $S=\{x,y/-\pi\le x\le\pi,\ |y|\le b/(1-h)\}$ и не покидает его.

Заметим, что если параметр h стремится к нулю, то ширина притягивающего слоя – величина $2b/(1-h)$ – стремится к значению $2b$, а если h стремится к единице, то ширина S неограниченно возрастает.

Наличие притягивающего слоя и симметричность фазового портрета отображения (1) в плоскости (x,y) относительно начала координат [4, с. 17], позволяет рассматривать свойства фазовых траекторий только внутри слоя S, т.к. только в нем могут существовать аттракторы отображения, и только в области $y>0$.

Определение. Неподвижной точкой отображения F назовем точку $T(x,y)$, для координат (x,y) которой выполнено условие $(\bar{x},\bar{y})=(x,y)$.

Теорема 2 [4, с. 17]. Если параметры отображения принадлежат области P, то оно имеет неподвижные точки $O_1(0{,}0)$ и $O_2(\pi,0)$ (и совпадающую с ней на цилиндре точку $\tilde{O}_2(-\pi,0)$). Неподвижная точка O_2 при всех значениях параметров – гиперболическая (седловая). Неподвижная точка O_1 устойчива в области $P_{s1}=P'_{s1}\cup P'_{s2}$, где $P'_{s1}=\{a,b,h\ /\ 0<h<1,\ 0<a\le 2,\ 0<b\le 1+h\cdot(a-1)\}$,

$P'_{s2} = \{ a, b, h \,/\, 0 < h < 1,\ 2 < a < 4,\ (a-2)(1+h) < b < 1 + h \cdot (a-1) \}$ и неустойчива в области $P_{u1} = P \setminus P_{s1}$.

Следствие. Неподвижная точка O_1 теряет свою устойчивость либо при переходе через прямую $b = (a-2)(1+h)$ (в результате бифуркации удвоения превращаясь в «обратное седло»), либо при переходе через прямую $b = 1 + h \cdot (a-1)$ (в результате бифуркации типа $\lambda = e^{ix}$ превращаясь в неустойчивый фокус или неустойчивый узел). При этом в окрестности точки O_1 рождается устойчивый колебательный цикл периода два $\{O_3, O_4\}$.

2. Поведение фазовых траекторий. Для ряда конкретных систем, описываемых отображением (1), важно, чтобы в окрестности начала координат существовало устойчивое притягивающее множество и отсутствовала гомоклиническая структура точки O_2, Такую структуру фазового пространства в окрестности начала координат назовем структурой *К*.

Элементарный анализ векторного поля и критических направлений позволяет оценить расположение изоклин и направления сепаратрисных инвариантных кривых неподвижных точек $\widetilde{O}_2$ и O_2 при $0 < b < a$, $0 < h < 1$.

Теорема 3. В области ($-\pi < x < 0,\ 0 < y$) с ростом параметра h от 0 до 1 векторное поле системы (1) поворачивается против часовой стрелки, а области ($0 < x < \pi,\ 0 < y$) поворачивается по часовой стрелке.

Наряду с системой (1) рассмотрим систему, в которой параметр h равен единице:

$$\begin{cases} \overline{x} = x + y - a \cdot \sin x \,(\mathrm{mod}\, 2\pi), \\ \overline{y} = y - b \cdot \sin x \end{cases} \tag{2}$$

Выходящую сепаратрисную инвариантную кривую точки $\widetilde{O}_2$ для системы (1) обозначим через L_{α_1}, для системы (2) – через L_{α_2}. Входящую сепаратрисную инвариантную кривую точки O_2 для системы (1) обозначим через L_{ω_1}, для системы (2) – через L_{ω_2}. Из теоремы 3 непосредственно вытекают:

Следствие 1. В области $y > 0$ кривая L_{α_1} расположена ниже кривой L_{α_2}, кривая L_{ω_1} расположена выше кривой L_{ω_2}.

Следствие 2. Если при $h = h^*$ отсутствует гомоклиническая структура точки $\tilde{O}_2$, то она отсутствует и при любом значении $h < h^*$.

Следствие 3. Локальная структура фазового пространства отображения (1) вблизи нуля есть структура *K*, если параметры принадлежат области $P_0 = \{a, b, h / 0 < a < 1, 0 < b < \dfrac{a^2}{2\pi}, h = 1\}$ [2, с. 36].

Попробуем определить более широкую, чем P_0, область параметров, для точек которой в фазовом пространстве отображения (1) отсутствует гомоклиническая структура точки $O_2(\pi, 0)$. В силу теоремы 3 и ее следствий для этого достаточно, чтобы выходящая сепаратрисная инвариантная кривая точки $\tilde{O}_2$ была бы расположена ниже, чем входящая сепаратрисная инвариантная кривая точки O_2.

3. Поведение сепаратрисных кривых гиперболических точек O_2 и $\tilde{O}_2$. Расположение изоклин и направления векторного поля при $b/(1-h) < a$ говорят о том, что сепаратрисная кривая L_{ω_1} точки O_2 пересекает отрезок $N_1 = \{x, y / x^* < x < \pi, y = b/(1-h)\}$, где $x^* = \pi - \arcsin(b/(a \cdot (1-h)))$ и $N_1 \subset N = \{x, y / 0{,}5\pi < x < \pi, y = b/(1-h)\}$. В то же время выходящая сепаратрисная инвариантная кривая L_{α_1} точки $\tilde{O}_2$ полностью лежит в слое S, поскольку начальная точка этой траектории – точка $\tilde{O}_2$ – принадлежит слою S. Следовательно, если гомоклиническая структура точки $\tilde{O}_2$ существует, то пересечение кривых L_{ω_1} и L_{α_1} должно происходить в области $D_{kp} = \{x, y / x^* < x < \pi, a\sin x < y \le b/(1-h)\}$. Покажем, что пересечение не может происходить на линии N_1.

Лемма 1. Прообразом прямой $y = b/(1-h)$ является множество $D = \left\{ x, y / -\infty < x < \infty, \dfrac{b}{1-h} < y \le \dfrac{(2-h)b}{(1-h)h} \right\}$. При этом единственной точкой подмножества $D_1 = \{ x, y / -\pi < x < \pi, \; y = b/(1-h)\}$, принадлежащей D и отображающейся на прямую $y = b/(1-h)$, является точка с координатами $(-0{,}5\pi, b/(1-h))$.

Доказательство. Найдем прообраз прямой $y = b/(1-h)$. Согласно (1) , $\bar{y} = hy - b\sin x$, т.е. $hy - b\sin x = b/(1-h)$. Отсюда $y = \left(b/(1-h) + b\sin x\right)/h$. Поскольку $|\sin x| \le 1$, то $b/\left(h(1-h)\right) - b/h \le y \le b/\left(h(1-h)\right) + b/h$. После преобразования левой и правой частей неравенств получаем $b/(1-h) \le y \le b(2-h)/\left(h(1-h)\right)$, что и доказывает лемму.

Следствие. Прямая $y = b/(1-h)$ не является инвариантом отображения F^* при $b/\left(1-h\right) < a$.

Лемма 2. Если параметры отображения принадлежат области $U_0 = \{a, b, h / \; b/(1-h) < a, \quad a + b/(1-h) < \pi/2\}$, то локальная структура седловой неподвижной точки O_2 такова, что кривая L_{α_1} расположена ниже, чем кривая L_{ω_1}.

Доказательство. Чтобы определить возможное расположение кривой L_{α_1}, построим образ области $D_0 = \left\{T(x, y) / -\pi < x < 0, \quad 0 < y < b/(1-h)\right\}$. Так как $\max\limits_{t \in D_0} \bar{y} = \max\limits_{t \in D_0} (hy - b\sin x) = \max\limits_{t \in D_0} (h/(1-h) + 1) \cdot b = b/(1-h)$, то $\max\limits_{t \in D_0} \bar{x} = \max\limits_{t \in D_0} (x + y - a\sin x) < \max\limits_{t \in D_0} (y) + \max\limits_{t \in D_0} (x - a\sin x)$. Иначе говоря, $\max\limits_{t \in D_0} \bar{x} = \begin{cases} b/(1-h) - \arccos(1/a) + a\sqrt{1-a^2}, & a \ge 1 \\ b/(1-h), & a < 1 \end{cases}$, т.е. $\max\limits_{t \in D_0} \bar{x} < a + b/(1-h)$, $\min\limits_{t \in D_0} \bar{y} = 0$, $\min\limits_{t \in D_0} \bar{x} = 0$. Таким образом, область D_0 под действием отображения F^* переходит в область $D_0^* = \left\{T(x, y) / \; 0 < x < a + b/(1-h), \quad 0 < y < b/(1-h)\right\}$, а область $D_0^{**} = \left\{ 0 < x < \pi - \arcsin\frac{b}{a(1-h)}, \quad a\sin x < y < \frac{b}{1-h} \right\}$ переходит в область $D_0^{***} = \left\{ 0 < x < \frac{\pi}{2} + \frac{b}{1-h} - a < \frac{\pi}{2}, \quad a\sin x - \frac{b}{1-h} < y < \frac{b}{1-h} \right\}$. Отсюда получаем условие, при котором невозможно пересечение кривых L_{ω_1} и L_{α_1} в области D_0: $a + b/(1-h) < \pi - \arcsin\left(b/(a(1-h))\right)$, что и доказывает утверждение леммы.

Теорема 4. Для наличия структуры *К* в окрестности начала координат достаточно, чтобы параметры отображения (1) принадлежали области $U = (U_{11} \cap U_{12}) \cup (U_{21} \cap U_{22})$, $U_{11} = \left\{ a, b, h \,/\, b/(1-h) \le a,\ a + b/(1-h) < 0{,}5\pi \right\}$

$U_{12} = \left\{ \{0 < a < 2, 0 < b < 1 + h(a-1)\} \cup \{ 2 < a < 4,\ (a-2)(1+h) < b < 1 + h(a-1) \} \right\}$,

$U_{21} = \left\{ a, b, h \,/\, b/(1-h) < a,\ a + b/(1-h) < 0{,}5\pi \right\}$

$$U_{22} = \left\{ 0 < ah - b, 0 < \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a(1-h)} \right)^2} < \frac{1+h}{ah-b} \right\} \cup$$

$$\left\{ ah - b < 0, \quad 0 < \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a(1-h)} \right)^2} < \min\left\{ \frac{1-h}{b-ah}, \frac{2(1+h)}{a(1+h)-b} \right\} \right\}.$$

Вывод. Если параметры отображения (1) принадлежат области U, то поведение фазовых траекторий носит ограниченный характер. Устойчивое предельное множество есть либо неподвижная точка O_1, либо цикл $\{O_3, O_4\}$. Это важно для работы конкретных физических, биологических и т.д. систем, работа которых может быть описана с помощью отображения (1). В частности, для системы СФС это означает, что она может работать в синхронном или квазисинхронном режиме.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белых В.Н. Модели дискретных СФС и их исследование. – В кн. Системы фазовой синхронизации / Под ред. В.В. Шахгильдяна, Л.Н. Белюстиной. – М.: Радио и связь, 1982. – С. 161-162.

2. Лебедева Л.В. Аналитические оценки сепаратрисных русел для диссипативного *отображения тора // Теоретические и практические аспекты развития современной науки : материалы II международной научно-практической конференции, г. Москва, 30-31 декабря 2011 г. / Науч.-инф. издат. центр «Институт стратегических исследований». – М.: Изд-во «Спецкнига», 2011. – 384 с.*

3. Лебедева Л.В. Динамика дискретной системы фазовой синхронизации с интегрирующим фильтром // Universum: Технические науки : электрон. научн. журн. – 2017. – № 3(36). – URL: http:7universum.com/ru/tech/archive/item/4531

4. Лебедева Л.В. Диссипативное отображение цилиндра: неподвижные точки колебательного типа // Наука вчера, сегодня, завтра: Сб. ст. по материалам 13-ой междунар. науч.-практ. конф. № 6 (13). – Новосибирск: Изд. «СибАК», 2014. – 124 с.

5. Невзоров Ю.В. Новые направления развития систем СВЧ радиосвязи // Электросвязь. – 2012. – № 8. – С. 26-28.

6. Ризниченко Г.Ю. Математическое моделирование биологических процессов. Модели в биофизике и экологии: учебное пособие для бакалавриата и магистратуры / Г.Ю. Ризниченко. – М.: Издательство Юрайт, 2018. – 183 с. – (Серия: Университеты России).

7. Романов С.К., Тихомиров Н.М., Леньшин А.В. Системы импульсно-фазовой автоподстройки в устройствах синтеза и стабилизации частот. – М.: Радио и связь, 2010. –328 с.

8. Шахгильдян В.В., Пестряков А.В. Тенденции развития техники синтеза частот для телекоммуникационных систем и устройств // Электросвязь. – 2003. – № 11. – С. 74-78.

9. D. Dudkowski, S. Jafari, T. Kapitaniak, N.V. Kuznetsov, G.A. Leonov, A. Prasad Hidden attractors in dynamical systems // Physics Reports 637, 1–50, 2016.

10. G.A. Leonov General existence conditions of homoclinic trajectories in dissipative systems, Lorenz, Shimizu – Morioka, Lu and Chen systems. // Physics Letters A 376 (45), 3045-3050, 2012.