УДК 378.14

***Пронина Елена Владиславовна,***
*канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики – 2,*
*РТУ МИРЭА,*
*г. Москва, Россия*

# ОСОБЕННОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПАКЕТА GEOGEBRA ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕМЫ «КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА»

В статье рассматриваются вопросы преподавания темы «Кривые второго порядка» в курсе «Аналитической геометрии» в техническом вузе с помощью математического пакета GeoGebra. Показана интеграция научных разработок в области информационных технологий в преподавание фундаментальных основ математики. В статье затрагиваются вопросы, связанные с особенностями введения самых первых понятий темы «Кривые второго порядка», приведены пошаговые алгоритмы решения конкретных задач в среде GeoGebra, даны рекомендации по организации и проведению исследовательской деятельности студентов на семинарских занятиях, в процессе самостоятельной работы или дистанционного обучения.

**Ключевые слова**: GeoGebra, задание кривых второго порядка, геометрическое место точек, эллипс, гипербола, парабола, преподавание математики, дистанционное обучение.

***Elena V. Pronina,***
*candidate of physical and mathematical sciences,*
*associate professor of higher mathematics department – 2,*
*Russian Technological University (MIREA),*
*Moscow, Russia*

# FEATURES OF USING THE GEOGEBRA MATHEMATICAL PACKAGE WHEN STUDYING THE TOPIC «CURVES OF SECOND ORDER»

The article discusses the issues of teaching the topic «Curves of second order» in the course "Analytical geometry" at a technical university using the GeoGebra mathematical package. The integration of scientific developments in the field of information technology in teaching the fundamental foundations of mathematics is shown in the article. The issues related to the introduction of the very first concepts of the topic «Curves of second order» are discussed, step-by-step algorithms for solving specific problems in the GeoGebra environment are presented, and recommendations for organizing and conducting research activities of students in seminars, in the process of independent work or distance learning are proposed.

**Keywords:** GeoGebra, tasks cinnected with Curves of second order, geometric place of points, ellipse, hyperbola, parabola, teaching mathematics, distance learning.

## Введение

Математическое образование студента технического вуза предполагает владение фундаментальными математическими понятиями и особенностями их использования для анализа и моделирования физических процессов и явлений, для грамотного выбора оптимального решения из множества решений, найденных в результате экспериментов и исследований.

Всеобщая компьютеризация общества, растущие объемы информации, необходимые будущим специалистам, требуют от преподавателя все более широкого использования научных разработок в сфере современных информационных технологий в обучении с целью эффективной, грамотной и динамичной организации учебного процесса на современном уровне.

Более того, следует отметить, что в настоящее время очень остро стоит вопрос организации эффективного дистанционного обучения, что также требует рассмотрения новых подходов в области преподавания фундаментальных математических дисциплин.

Одной из сложных тем, требующих наглядного представления, изучаемых в курсе «Аналитическая геометрия» студентами технических вузов, является тема «Кривые второго порядка».

К сожалению, количества часов, отводимых на изучение темы «Кривые второго прядка», недостаточно для глубокого понимания особенностей задания кривых, механизмов изменения формы, в зависимости от изменения параметров, представления взаимного расположение нескольких кривых, касательных к кривым и, как следствие, физических свойств кривых.

Стремительно развивающиеся системы компьютерной математики позволяют при изучении темы «Кривые второго порядка» проводить моделирование и визуализацию различных задач на простых и наглядных примерах, которые можно самим создавать, трансформировать, перемещать на плоскости. Для этих целей как нельзя лучше подходит математический пакет GeoGebra, позволяющий моделировать и решать различные геометрические задачи, проводить анализ геометрической конфигурации объектов, строить графики функций, получать изображения фигур на плоскости и в пространстве, устанавливать связи между элементами фигур, проводить дополнительные построения, создавать анимацию рисунков.

Процесс самостоятельного моделирования задачи средствами информационных технологий способствует систематизации, глубокому пониманию и усвоению теоретических основ темы, а также формированию навыков, связанных с применением математических методов в конструировании объектов.

Хочется подчеркнуть, что использовать данную среду предлагается не для получения готовых ответов в решении конкретных задач, а для проведения исследований, иллюстрации сложных взаимосвязей и понятий геометрических составляющих кривых второго порядка, с целью приобщения учащихся к исследовательской деятельности и повышения мотивации обучения.

**Определение эллипса, гиперболы, параболы как геометрического места точек**

Кривыми второго порядка называются кривые, определяемые относительно текущих координат уравнением второй степени: $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$, где коэффициенты $A,B,C,D,E,F\in\mathbf{R}$ и $A^2+B^2+C^2\neq 0$. Как известно, путем преобразования системы координат общее уравнение кривой второго порядка можно привести к каноническому виду, задающему окружность, эллипс (окружность, как частный случай эллипса), гиперболу и параболу.

В начале изучения темы «Кривые второго порядка» вводится определение эллипса, гиперболы и параболы как геометрического места точек (ГМТ), удовлетворяющих определенным условиям. С целью развития исследовательских навыков и последующего закрепления теории кривых второго порядка перед обучающимися целесообразно поставить задачу на поиск заданного ГМТ, предложив выполнить шаги по ее реализации в пакете GeoGebra.

Структура заданий может быть следующей:

- создаем математическую модель задачи, обозначая круг исследований;
- реализуем задачу в среде GeoGebra;
- обсуждаем полученный результат, выдвигаем новые гипотезы о свойствах полученной кривой;
- проверяем гипотезы;
- делаем выводы.

**Задача 1.** Найти геометрическое место точек (ГМТ), сумма расстояний от каждой из которых до двух заданных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

Очевидно, что речь идет о задании эллипса. Постоянную величину принято обозначать $2a$ – большая ось эллипса.

Условимся, что фокусы будущего эллипса лежат на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат.

Построим *математическую модель* задачи.

Пусть $F_1$ и $F_2$ – точки, о которых говорится в условии, и пусть $M(x,y)$ – точка плоскости, принадлежащая искомому ГМТ.

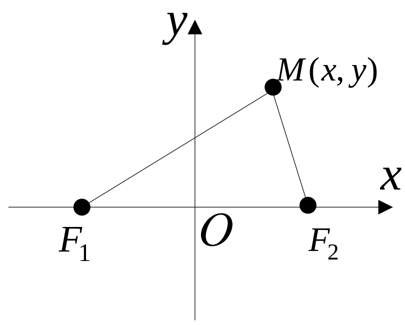


Рисунок 1

Тогда $F_1M$, $F_2M$ – расстояния от заданных точек до точки $M$. По условию задачи для точек $M$ должно выполняться условие: $F_1M + F_2M = 2a$.

Расстояние от точки $M(x,y)$, принадлежащей искомому ГМТ, до фокусов $F_1$ и $F_2$ может быть вычислено по формуле $F_1M = \sqrt{(x_M - x_{F_1})^2 + (y_M - y_{F_1})^2}$, $F_2M = \sqrt{(x_M - x_{F_2})^2 + (y_M - y_{F_2})^2}$.

*Реализуем задачу в среде GeoGebra*. Выясним, что представляет собой искомое ГМТ, выполнив следующие действия.

**Шаг 1**. На панели объектов задаем фокусы $F_1$ и $F_2$ (произвольно).

В поле ввода запишем F1=(–4,0) → Нажмем клавишу Enter.

В поле ввода запишем F2=(4,0) → Нажмем клавишу Enter.

**Шаг 2**. Зададим значение параметра *c*, как половину фокусного расстояния $F_1F_2$.

В поле ввода запишем c=(*abs*(*x*(*F*1)+ *abs*(*x*(F2))/2 → Enter.

*Замечание*: функция *x*(*F*1) возвращает абсциссу точки F1, функция *abs*(*p*) возвращает абсолютное значение величины *p*.

**Шаг 3.** Зададим параметр $a$, больший чем *c*.

В поле ввода запишем *a*=6 (*например*) → Enter.

*Замечание*: после нажатия клавиши Enter, появится «бегунок» – полоса 

. Если нажать на эту полосу, то появится возможность задать диапазон значений параметра *a* с шагом изменения: 

. В примере нижнее значение параметра *a* задано в виде *c*+1.

**Шаг 4**. Зададим геометрическое место точек.

В поле ввода запишем

g: *abs*(*sqrt*((*x*-*x*(*F*1))^2+(*y*-*y*(*F*1))^2)+ *sqrt*((*x*-*x*(*F*2))^2+(*y*-*y*(*F*2))^2))=2**a*

*Замечание:* функция *sqrt*(*p*) возвращает значение квадратного корня из *p*, *g* – неявно заданная кривая второго порядка (искомое ГМТ).

Нажмем клавишу Enter.

После каждого шага в области справа – область графического представления – появляются вносимые геометрические объекты. После выполнения шага 4 мы увидим эллипс. На рисунке 2 представлен конечный результат.

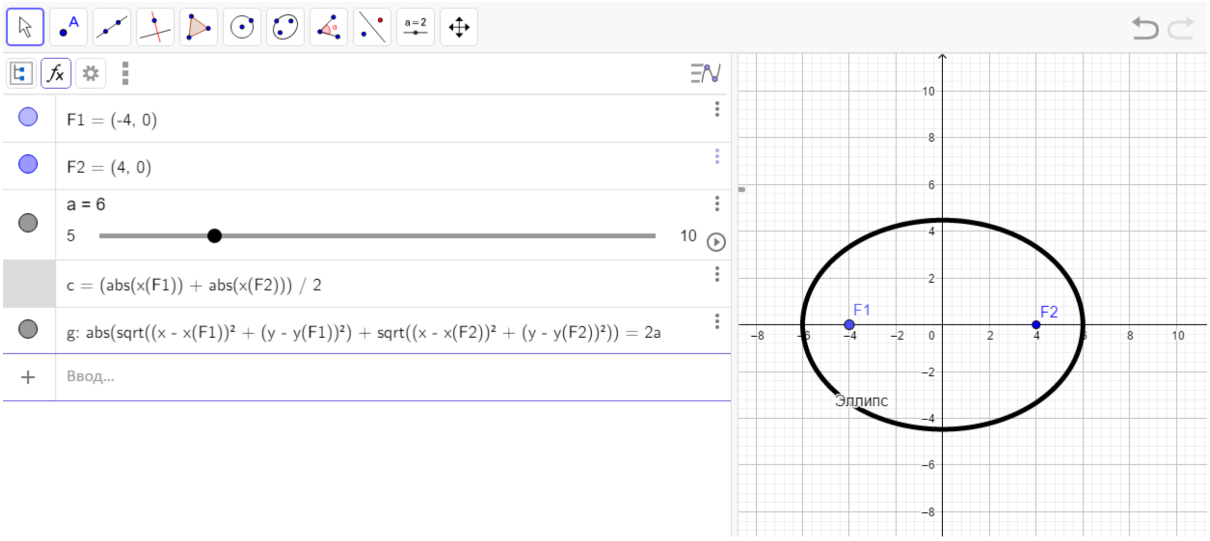


Рисунок 2

Визуализация искомого геометрического множества точек дает возможность дальнейшего *исследования и обсуждения* геометрических свойств полученной кривой. Например, нажав на кнопку  в области задания значения параметра $a$, можно проследить, как будет меняться форма эллипса в зависимости от значений большой полуоси $a$.

Убедимся в выполнении условия, сформулированного в задаче.

**Шаг 5**. Зафиксируем на полученном эллипсе точку $M$.

Выберем на панели инструментов инструмент  – «Точка» и щелкнем мышкой на самом эллипсе.

**Шаг 6.** Зададим векторы $\overrightarrow{F_1M}$ , $\overrightarrow{F_2M}$ .

В поле ввода запишем Вектор (F1,M) ⟶ Enter.

В поле ввода запишем Вектор (F2,M) ⟶ Enter.

*Замечание*: система сама назовет векторы – в нашем случае векторы $u$ и $v$, при желании их можно переименовать.

**Шаг 7.** Найдем модули этих векторов.

В поле ввода запишем r1=*abs*($u$) ⟶ Enter.

В поле ввода запишем r2=*abs*($v$) ⟶ Enter.

**Шаг 8**. Найдем сумму расстояний.

В поле ввода запишем r1+ r2 = ⟶ Enter.

Рисунок 4

**Шаг 9**. Для дальнейших исследований нам понадобится отслеживать изменение параметра 2*a*.

В поле ввода введем 2*a = → Enter.

**Шаг 10**. Для придания динамики чертежу выполним следующее.

Щелкнем левой кнопкой мыши на точке *M*, появится всплывающее окно, как показано на рисунке 3.

Установим галочку «Оставлять след».

Установим галочку «Анимация».

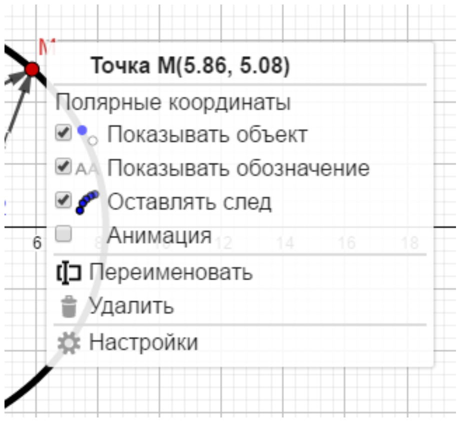


Рисунок 3

Динамическая *проверка сформулированного в задаче условия*: на панели объектов слева будет видно, что при перемещении точки *M* вдоль кривой координаты радиус-векторов r1 и r2 меняются, как следствие, меняются их модули, но сумма r1+ r2 остается неизменной, равной 2*a*.

Результат работы в программе GeoGebra показан на рисунке 4.

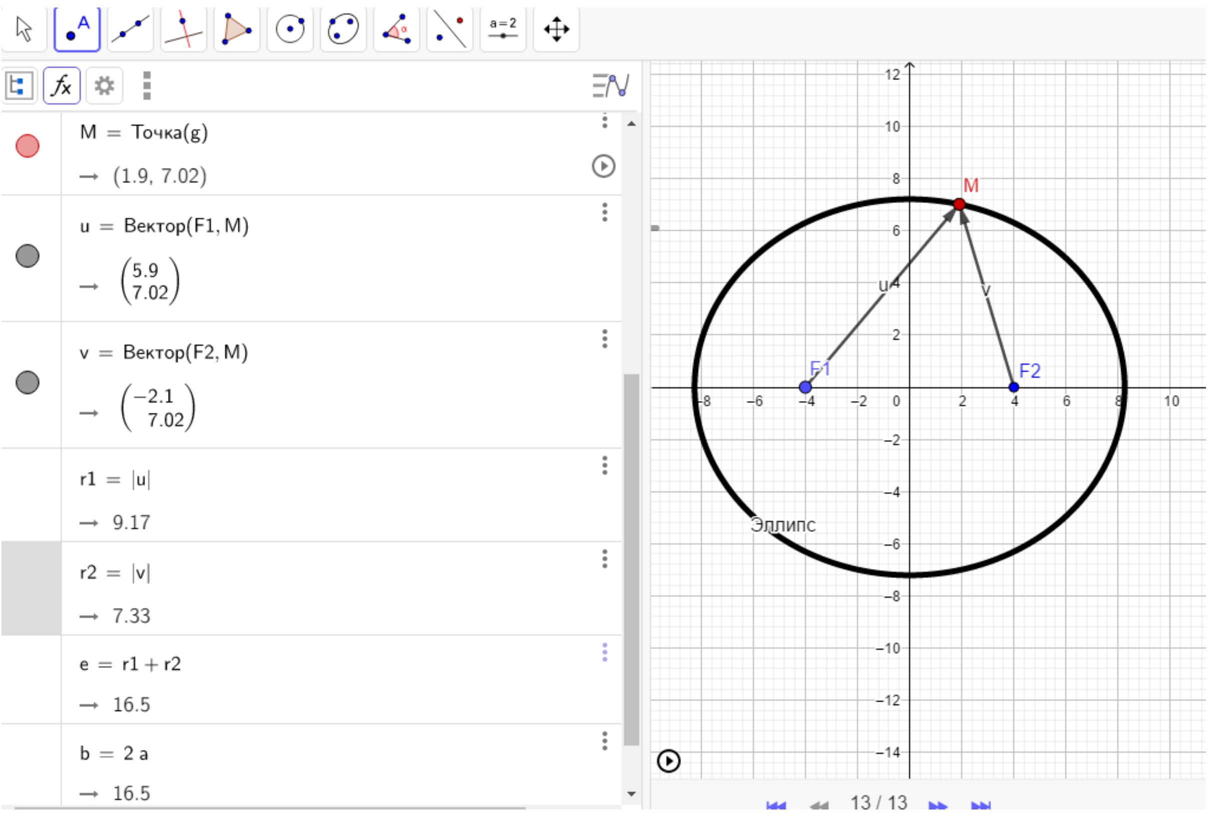


Рисунок 4

Дальнейшие исследования эллипса можно проводить, изменяя координаты фокусов, в том числе располагая их на оси ординат или сводя фокусы в одну точку, показав в динамике, как эллипс переходит в окружность. Здесь же будет уместно обсудить и проследить на чертеже изменение формы эллипса в зависимости от значения эксцентриситета, а также построить директрисы эллипса.

Используя аналогичный подход, можно ввести понятие гиперболы, поставив перед обучающимися следующую задачу.

**Задача 2.** Найти геометрическое место точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух заданных точек плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.

Не будем подробно описывать шаги в программе GeoGebra, проиллюстрируем только конечный результат.

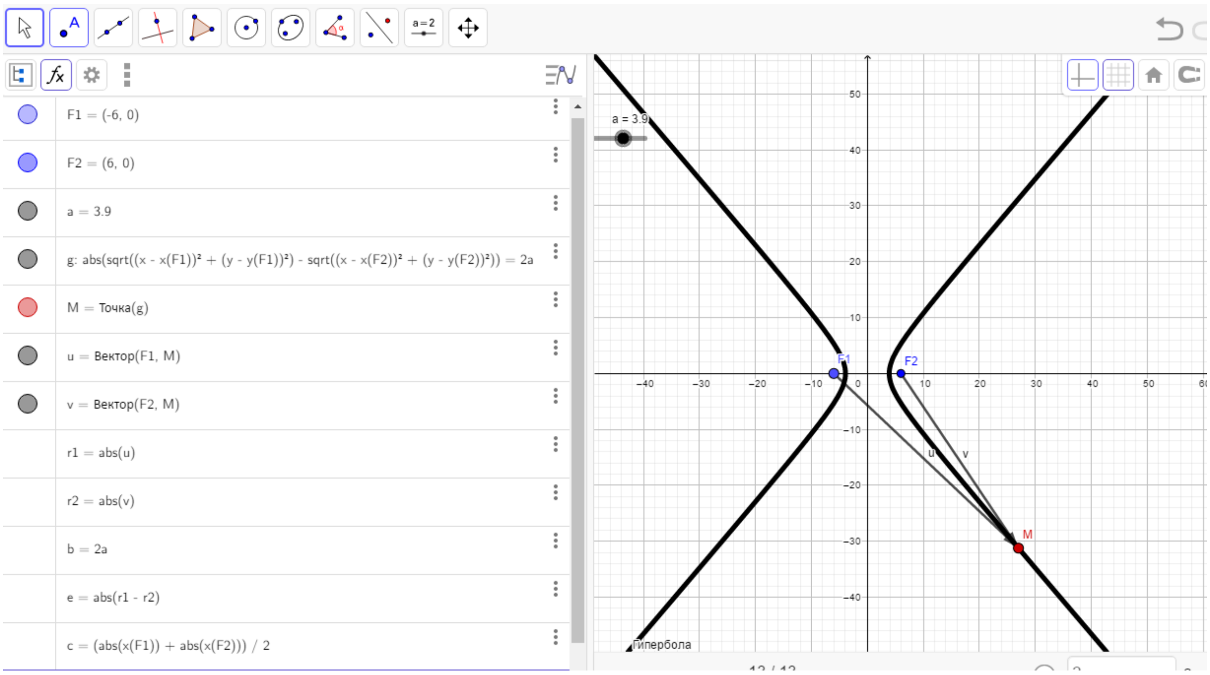


Рисунок 5

Рассмотрим задание параболы аналогично, как ГМТ.

**Задача 3**. Найти геометрическое место точек плоскости, расстояние от каждой из которых до данной точки $F$ этой плоскости, называемой фокусом, равно расстоянию до прямой $d$, называемой директрисой, не проходящей через $F$.

Условимся, что вершина параболы лежит в начале координат.

Обсудим аналитическое задание ГМТ.

Пусть $F$ – фокус и пусть $M(x,y)$ – точка плоскости, принадлежащая искомому ГМТ. $\rho(M,d)$ – расстояние от точки $M$ до прямой $d$, $\rho(M,F)$ – расстояние от точки $M$ до фокуса $F$. По условию задачи для точек $M$ должно выполняться условие: $\rho(M,d) = MF$.

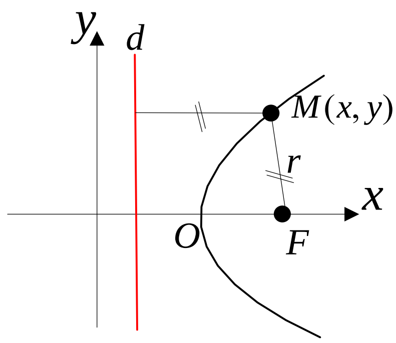

Рисунок 6

Прямую $d$ будем задавать, как прямую, проходящую через некоторую точку на оси абсцисс. Например точку $A(x_d,0)$. Тогда прямая $d$ задается уравнением $x - x_d = 0$.

Расстояние от точки $M(x,y)$, принадлежащей искомому ГМТ, до прямой $d$ может быть вычислено по формуле $\rho(M,d) = |x_M - x_d|$.

Расстояние от точки $M(x,y)$, принадлежащей искомому ГМТ, до фокуса $F$ равно $MF = \sqrt{(x_M - x_F)^2 + (y_M - y_F)^2}$.

С помощью математического пакета GeoGebra выясним, что представляет собой искомое ГМТ. Кроме того, исследуя возможные варианты расположения директрисы относительно фокуса, установим, что расстояние от фокуса до вершины параболы равно расстоянию от вершины параболы до директрисы (половине фокального расстояния параболы), убедимся, что директриса параболы, действительно, ни при каких условиях не пересекает параболу.

В среде GeoGebra выполним следующие действия.

**Шаг 1**. На панели объектов зададим фокус $F$.

В поле ввода запишем F=(4,0) → Enter.

**Шаг 2**. Зададим директрису перпендикулярно оси $Ox$, проходящую через некоторую точку, лежащую на оси $Ox$.

Выберем на панели инструментов инструмент – «Точка» и щелкнем мышкой на оси абсцисс.

*Замечание*: в нашем примере выбрана точка с абсциссой $x$=–4. Это сделано преднамеренно, чтобы вершина параболы совпала с началом координат. Впоследствии рассмотрим и менее тривиальный случай.

На панели объектов отразится точка $A$ с координатами (–4,0).

На панели объектов щелкнем мышкой на символ рядом с точкой $A$ и выберем команду «Переименовать». Зададим имя точки – $D$.

В поле ввода запишем $d$: $x$ =$x$($D$)→ Enter.

**Шаг 3.** Зададим геометрическое место точек.

В поле ввода запишем

g: *abs*(*x*-*x*(*D*))= *sqrt*((*x*-*x*(*F*))^2+(*y*-*y*(*F*))^2) → Enter.

После выполнения шага 3 в области графического представления появится парабола.

Результат работы шагов 1–3 показан на рисунке 7.

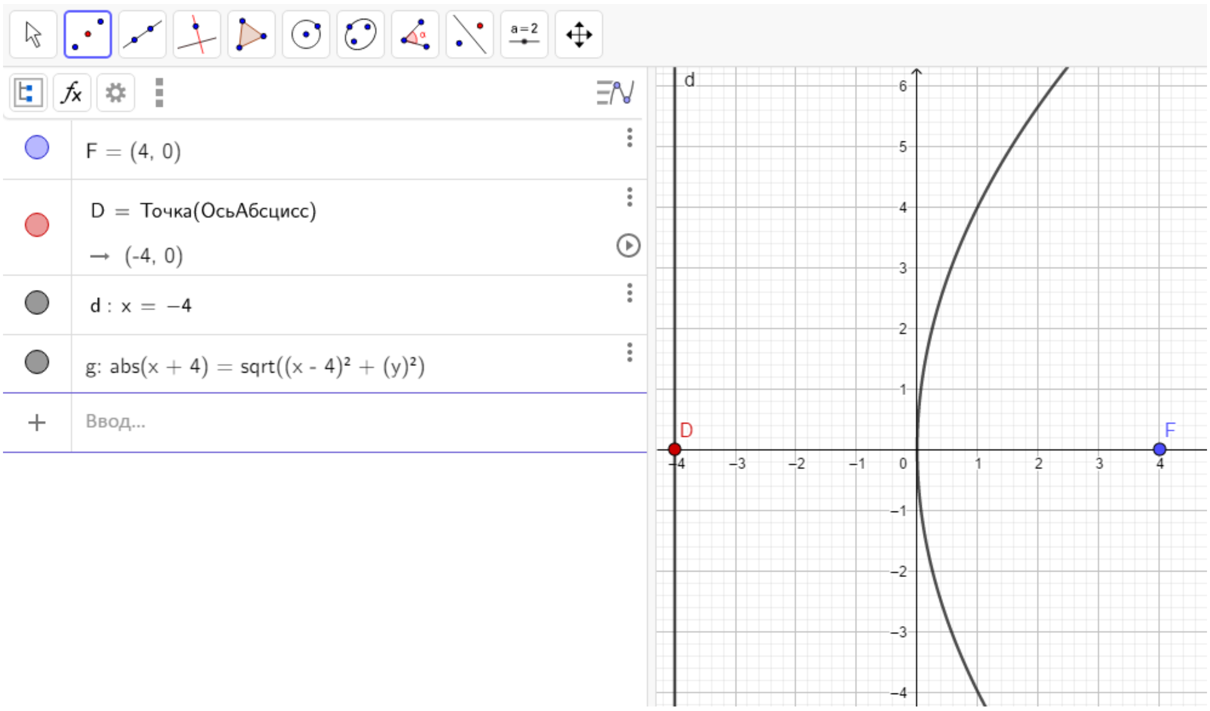


Рисунок 7

**Шаг 4.** Найдем координаты вершины параболы, как точку пересечения кривой с осью $Ox$.

На панели инструментов выберем инструмент «Точка» → «Пересечение» (см. рисунок 8).

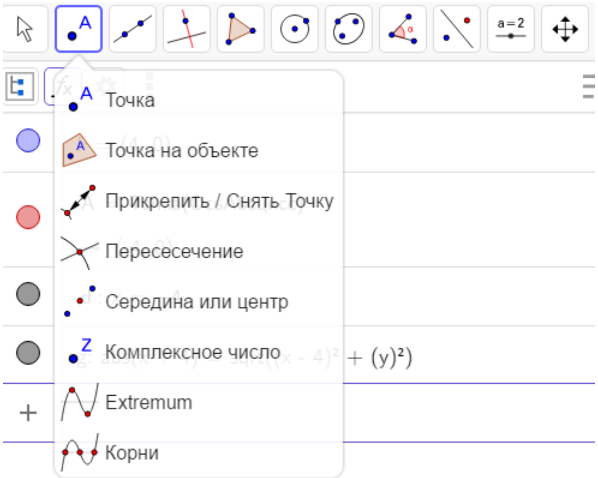


Рисунок 8

Далее щелкнем сначала на параболе, а затем на оси абсцисс (после выбора появляется всплывающая подсказка с последовательностью действий, которые необходимо выполнить).

На панели объектов слева появится описание новой точки

*A*=Пересечение(*g*,ОсьАбсцисс)

(0,0).

**Шаг 5.** Найдем теперь координаты середины отрезка *DF*.

На панели инструментов выберем инструмент «Точка» → «Середина или центр». Далее выберем сначала точку *D*, а затем точку *F*.

На панели объектов слева появится описание новой точки.

*B*=Середина(*D*,*F*)

(0,0).

Как видим, результаты выполнения шагов 4 и 5 совпадают. Можем сделать вывод, что вершина параболы находится посередине между фокусом и директрисой.

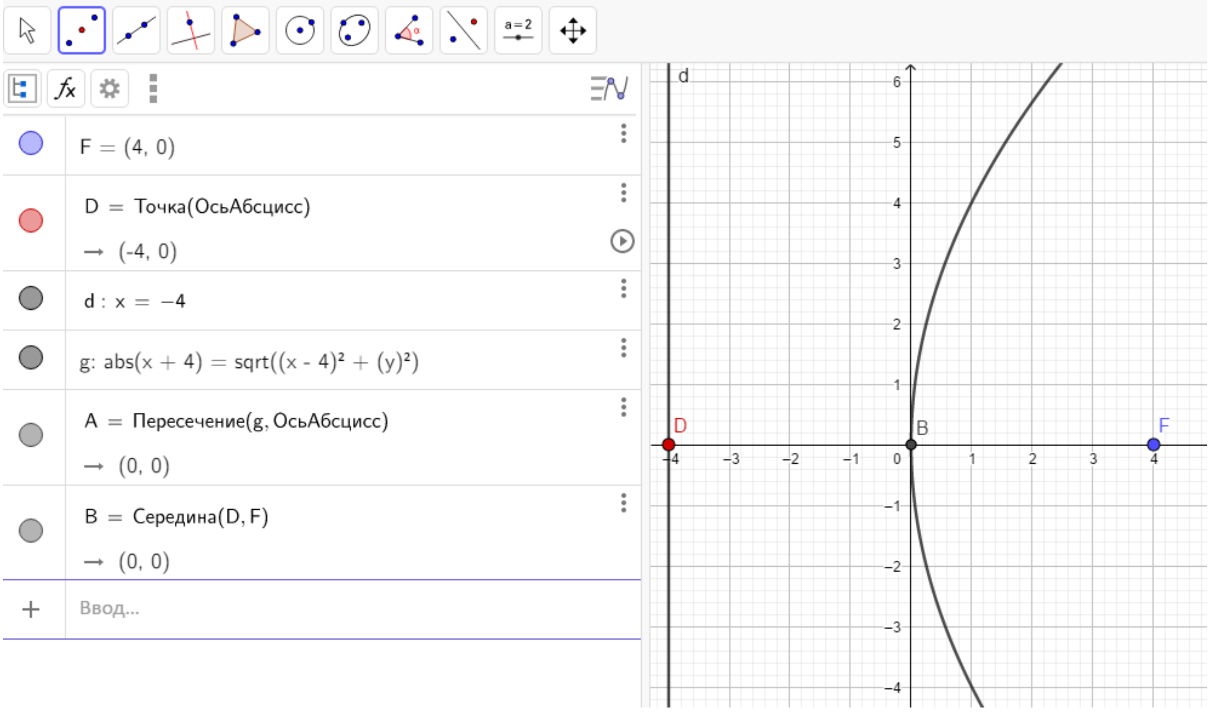


Рисунок 9

Проверим гипотезу.

На панели инструментов выберем  → «Перемещение». Установим курсор на точку $D$ и будем смещать точку $D$ вправо. Заметим, что при этом сама парабола смещается ближе к фокусу, середина отрезка $DF$ и координаты вершины совпадают.

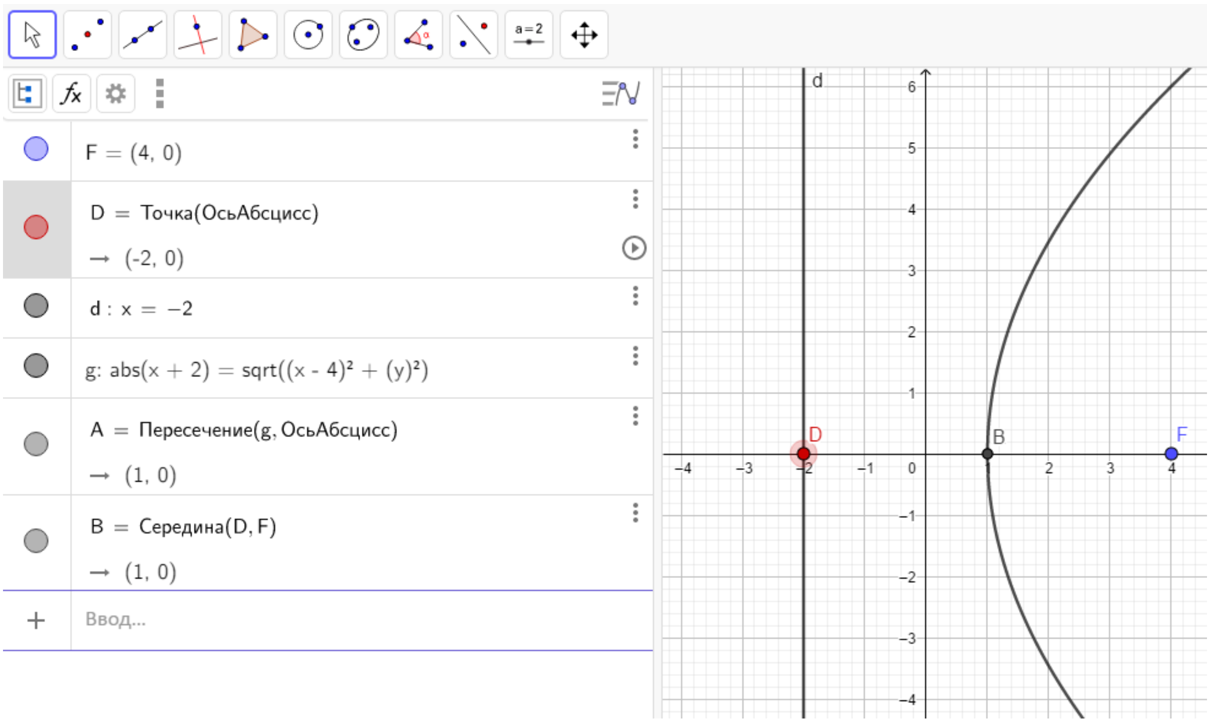


Рисунок 10

Сместив теперь точку D, например в точку (5,0), получим другое изображение параболы.

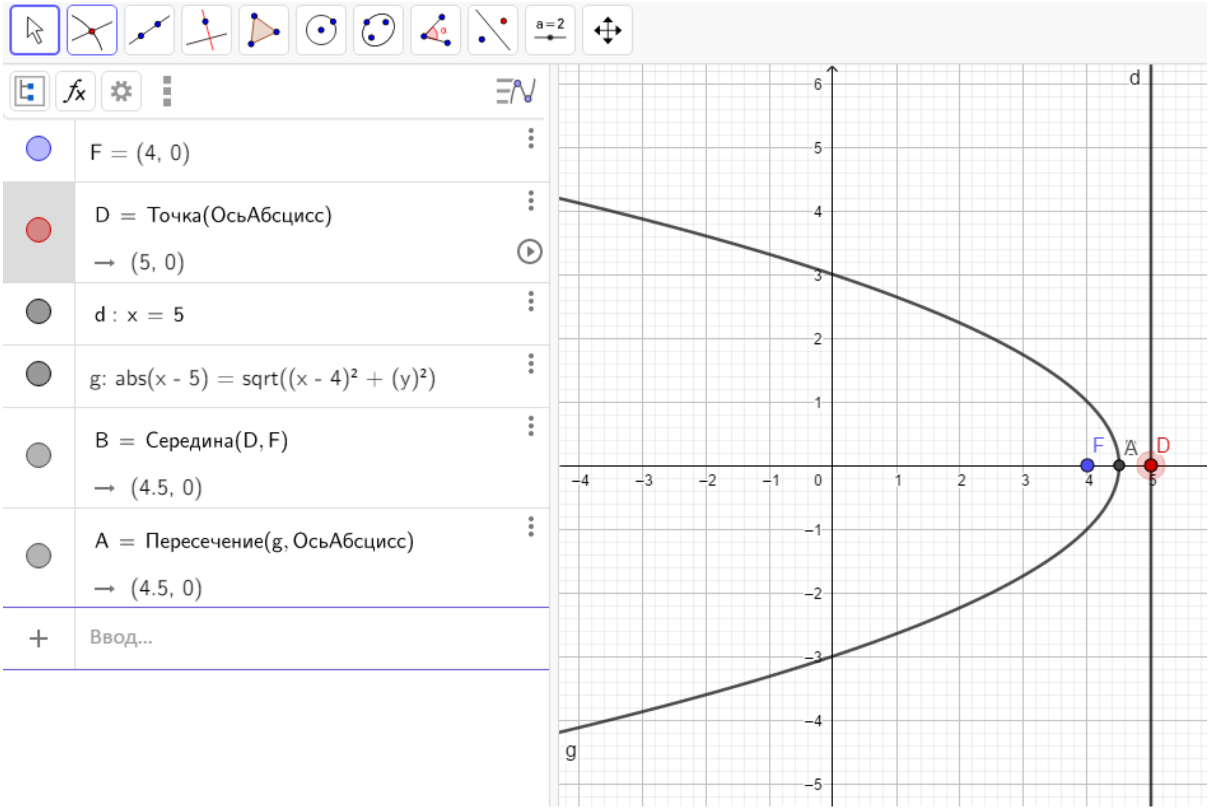


Рисунок 11

На основании полученных изображений делаем выводы о графических свойствах параболы, обсуждаем и формулируем свойства параболы.

**Выводы**

Использование динамических чертежей математического пакета GeoGebra при изучении темы «Кривые второго порядка» позволяет визуально представить ГМТ, обладающих определенными свойствами, – эллипс, гиперболу или параболу, проследить изменение формы описанных кривых при изменении их параметров. Формат компьютерного моделирования и реализации задачи средствами информационных технологий позволяет закрепить и глубже осознать фундаментальные математические понятия по данной теме. Статья может быть полезна студентам при начальном знакомстве с темой кривые второго порядка или использована преподавателями для организации семинарских и индивидуальных занятий, самостоятельной работы и дистанционного обучения по данному разделу курса «Аналитическая геометрия».


*СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ*

1. *Акопян А. В. Геометрические свойства кривых второго порядка / А. В. Акопян, А. А. Заславский. – Москва : МЦНМО, 2007. – 136 с. – Текст : непосредственный.*
2. *Краснов М. Л. Вся высшая математика : учебник. Т. 1 / М. Л. Краснов [и др.]. – 4-е изд. – Москва : Едиториал УРСС, 2012. – 336 с. – Текст : непосредственный.*
3. *Ларин С. В. Методика обучения математике: Компьютерная анимация в среде GeoGebra : учебное пособие для вузов / С. В. Ларин. – Москва : Юрайт, 2018. – 233 с. – Текст : непосредственный.*
4. *Лубягина Е. Н. Опыт организации учебно-исследовательской деятельности студентов при изучении кривых второго порядка / Е. Н. Лубягина, Л. В. Тимшина. – Текст : электронный // Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика. – 2017. – № 2 (23). – С. 71–84.*
5. *Смирнов В. А. Геометрия с GeoGebra. Планиметрия / В. А. Смирнов, И. М. Смирнова. – Москва : Прометей, 2018. – 206 с. – Текст : непосредственный.*
6. *Смирнов В.А. Геометрия с GeoGebra. Стереометрия / В. А. Смирнов, И. М. Смирнова. – Москва : Прометей, 2018. – 172 с. – Текст : непосредственный.*