«Наука и образование: новое время» № 2, 2025
Средняя школа

УДК 372.851

ОБУЧЕНИЕ БАРИЦЕНТРИЧЕСКОМУ МЕТОДУ РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Огурцова О.К.,
Национальный исследовательский университет имени Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Российская Федерация
E-mail: ogurcovaok@mail.ru

Аннотация. *В статье рассматриваются физические понятия материальной точки и центра тяжести (барицентра) материальных точек, их математические интерпретации, сущность барицентрического метода решения геометрических задач, представлена система задач для обучения этому методу.*

Ключевые слова: *материальная точка, центр тяжести (барицентр), барицентрический метод решения геометрических задач.*

TEACHING THE BARYCENTRIC METHOD OF SOLVING GEOMETRIC PROBLEMS

Ogurtsova O.K.,
National Research University named after N.I. Lobachevsky, Nizhny Novgorod, Russian Federation
E-mail: ogurcovaok@mail.ru

Abstract. *The article considers the physical concepts of the material point and the center of gravity (barycenter) of material points, their mathematical interpretations, the essence of the barycentric method of solving geometric problems, a system of problems for teaching this method is presented.*

Keywords: *material point, center of gravity (barycenter), barycentric method of solving geometric problems.*

В геометрии рассматривается понятие точки, как одно из неопределяемых понятий. В физике же вводится понятие материальной точки, как тела определённой массы, размерами которого можно пренебречь, т.к. они достаточно малы по сравнению с расстояниями от данного тела до других тел. Тогда считается, что вся масса тела сосредоточена в одной точке. Далее в физике для двух материальных точек вводится понятие центра тяжести (барицентра). Наглядно его можно проиллюстрировать следующим образом. Рассматриваются два небольших шарика, имеющие массы m_1 и m_2, соединённые жёстким «невесомым» стержнем. Тогда на этом стержне имеется такая замечательная точка Z, что если подвесить всю систему в этой точке, то она будет находиться в равновесии – ни один из шариков не «перетянет». Эта точка Z – центр тяжести (барицентр) рассматриваемых материальных точек с массами m_1 и m_2. Положение этой точки определяется на стержне (отрезке, соединяющем данные две материальные точки) архимедовым правилом: $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_2}{m_1}$ (см. рис. 1).

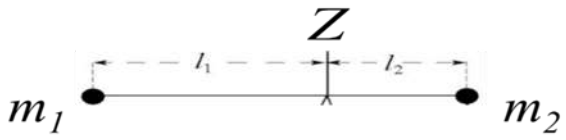

Рис. 1

Затем вводится понятие центра тяжести (барицентра) n ($n \in N$, $n \geq 3$) материальных точек. Наглядно его можно проиллюстрировать следующим образом. Пусть в пространстве находятся n небольших шариков, имеющие массы m_1, m_2, …, m_n, соединённые жёсткими «невесомыми» стержнями в систему. Тогда имеется такая замечательная точка Z, что если подвесить всю систему в этой точке, то она будет находиться в равновесии – ни один из шариков не «перетянет». Эта точка Z – центр тяжести (барицентр) рассматриваемых материальных точек с массами m_1, m_2, …, m_n (см. рис. 2). Положение этой точки определяется основными свойствами барицентров:

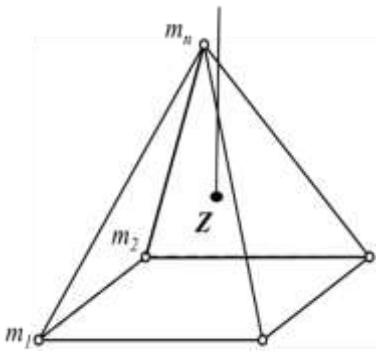

Рис. 2.

1) Положение барицентра материальных точек не зависит от порядка их объединения.

2) Положение барицентра материальных точек не изменится, если заменить несколько материальных точек их барицентрами.

Математические интерпретации описанных выше физических понятий дают следующие определения.

Определение 1: Пара (m, X) называется материальной точкой, где X – произвольная точка пространства, $m \in R$, $m>0$. Число m называется массой, помещённой в точку X.

Определение 2: Барицентром двух материальных точек (m_1, X_1) и (m_2, X_2) называется материальная точка (m_1+m_2, X), где $X \in [X_1, X_2]$, $\frac{X_1X}{XX_2} = \frac{m_2}{m_1}$.

Из определения 2 следует, что:

1) массы материальных точек определяют отношение длин соответствующих отрезков, это отношение фиксирует расположение барицентра заданных точек на отрезке, их соединяющем, в частности, барицентр двух материальных точек с равными массами находится в середине отрезка, их соединяющего;
2) чтобы сделать фиксированную точку на отрезке, соединяющем две выделенные точки, местом расположения их барицентра, нужно задать массы этих точек, исходя из отношения длин соответствующих отрезков.

Определение 3: Барицентром n $(n \in N, n \geq 3)$ материальных точек (m_1, X_1), (m_2, X_2), …, (m_n, X_n) называется материальная точка $(m_1+m_2+\ldots+m_n, X)$, где расположение точки X определяется следующим образом:

1) находится барицентр (m_1+m_2, Y_1) точек (m_1, X_1) и (m_2, X_2),
2) находится барицентр $(m_1+m_2+m_3, Y_2)$ точек (m_1+m_2, Y_1) и (m_3, X_3),

   и т.д.

n-1) находится барицентр ($m_1+m_2+\ldots+m_n$, X) точек ($m_1+m_2+\ldots+m_{n-1}$, Y_{n-2}) и (m_n, X_n).

Из определения 3 следуют выше указанные два основных свойства барицентров, а также следующие свойства:

1) Прямая, проведённая через барицентр трёх материальных точек, расположенных в вершинах треугольника, и одну из его вершин, пересекает противоположную сторону в точке расположения барицентра материальных точек, помещённых в оставшиеся вершины.
2) Барицентр трёх материальных точек, расположенных в вершинах треугольника, является точкой пересечения прямых, каждая из которых проходит через соответствующую вершину треугольника и барицентр материальных точек, помещённых в оставшиеся вершины.
3) Всегда возможно поместить такие три массы в вершины треугольника, чтобы барицентр образующихся таким образом трёх материальных точек был расположен в фиксированной точке внутри треугольника.

Определения 1-3 и свойства, из них следующие, используются для решения геометрических задач барицентрическим методом. Сущность барицентрического метода состоит в в том, что внимание концентрируется на определённых точках – барицентрах каких-то систем материальных точек, связанных с рассматриваемой геометрической задачей. Система задач для обучения барицентрическому методу решения геометрических задач:

1. Докажите, что средние линии любого четырёхугольника и отрезок, соединяющий середины его диагоналей, проходят через одну точку и делятся ею пополам.
2. Докажите, что отрезки, соединяющие середины скрещивающих рёбер тетраэдра, пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам.
3. Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины.

4. Докажите, что в тетраэдре отрезки, соединяющие вершину тетраэдра с точкой пересечения медиан противоположной грани, пересекаются в одной точке, которая делит каждый такой отрезок в отношении 3:1, считая от вершины.
5. Докажите, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.
6. В тетраэдре $ABCD$ биссектрисы трёх плоских углов при вершине D пересекают отрезки BC, CA и AB соответственно в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.
7. Пусть в треугольнике ABC на сторонах AB, BC и AC взяты соответственно точки C_1, A_1 и B_1, не совпадающие с вершинами треугольника. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда выполняется равенство $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$.
8. Через середину медианы AA_1 и вершину B треугольника ABC проведена прямая. В каком отношении она делит сторону AC?
9. На сторонах AB, BC, CD и DA четырёхугольника $ABCD$ взяты соответственно точки K, L, M и N так, что $AK:KB=DM:MC=\alpha$, $BL:LC=AN:ND=\beta$. P – точка пересечения отрезков KM и LN. Найдите отношения $NP:PL$, $KP:PM$.

Другие примеры геометрических задач, в которых может быть применён барицентрический метод, приводятся в источниках [1, 2].

Список использованной литературы

1. Балк М.Б., Болтянский В.Г. Геометрия масс. – М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит. 1987. – 160 с.

2. Прасолов В. В. Задачи по планиметрии. Ч. 2. – М.: Наука, гл. ред. физ-мат. лит., 1991. – 240 с.: ил.

Сведения об авторе:

Огурцова Ольга Константиновна, *доцент, к.п.н., доцент кафедры алгебры, геометрии и дискретной математики Национального исследовательского университета имени Н.И. Лобачевского,*
Российская Федерация, 603022, Нижний Новгород, просп. Гагарина, д. 23.

Author information:

Ogurtsova Olga Konstantinovna, *Associate Professor, Ph.D., Associate Professor, Department of Algebra, Geometry and Discrete Mathematics, National Research University named after N.I. Lobachevsky,*
23 Gagarina Avenue, Nizhny Novgorod, 603022, Russian Federation

---

Поступила в редакцию / Received *16/04/2025.*

Принята к публикации / Accepted *23/04/2025.*

Опубликована / Published *29/04/2025.*